סכומים וטורים חשובים:

סכום הנדסית: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ **סכום הנדסית**

אינסופית $(|q|<1)$ **:** $S = \frac{a_1}{1-q}$ **טור חשבוני:**

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **בינום:** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ | $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$

טור חזקות: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{a=0}^{\infty}\frac{k^a}{a!} = e^k$

כללי מאורעות בסיסיים:

כלל הכפל:

$$P(A\cap B) = P(A\mid B)\cdot P(B) = B(B\mid A)\cdot P(A)$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$$

כלל ההכלה וההפרדה:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup ..\cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i\cap A_j) + ...(-1)^{n+1}\cdot P(A_1\cap ..\cap A_n)$$

א"ש בול: $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

הסתברות מותנית: $P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

אם A,B **ב"ת אז** $P(A\mid B) = P(A\mid B^c) = P(A)$

הסתברות שלמה וכלל בייס:

בהינתן חלוקה $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ **של מרחב המדגם**

יתקיים $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A\mid B_k)\cdot P(B_k)$ **וכן**

$$P(B_k\mid A) = \frac{P(A\mid B_k)\cdot P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A\mid B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A\mid B_k)\cdot P(B_k)}$$

דה-מורגן: $\overline{(A\cap B)}=\bar A\cup\bar B \quad \overline{(A\cup B)}=\bar A\cap\bar B$

הגדרת תלות בין מאורעות:

המאורעות A,B **ב"ת** $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

- ϕ,Ω **תמיד ב"ת עם מאורע אחר.**
- **מאורעות זרים שאינם ריקים – תלויים.**
- **מאורעות מוכלים שאינם ריקים – תלויים.**
- **מאורעות בלתי תלויים שאינם ריקים – נחתכים.**

מאורעות A,B **הם ב"ת אמ"מ האינדיקטורים שלהם ב"ת: [צריך לבדוק גם עבור (1,0),(0,1),(0,0)]**

$P(I_A=1, I_B=1) = P(I_A=1)\cdot P(I_B=1)$.

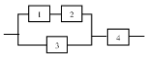
והאינדיקטורים ב"ת אם"ם הם בלתי מתואמים.

אמינות מערכת:

רכיבים בטור: $a = p_1\cdot p_2\cdots p_n$

רכיבים במקביל: $1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdots(1-p_n)$

מערכת מעורבת:



$a=\left(1-(1-p_3)(1-p_1p_2)\right)\cdot p_4$

דגימות מקריות:

פיזור r עצמים שונים ל-n תאים: $|\Omega|=n^r$.

פיזור r עצמים זהים ל-n תאים: $|\Omega|=\binom{n+r-1}{r}$

פונקציה של מ"מ: אם $Y = f(x)$ **אז**

$$P(Y=y) = \sum_{x: f(x)=y} P(X=x)$$

פונקצית הסתברות של מ"מ: $0 \le p(X=x) \le 1$

ניסויים ב"ת והתפלגויות בדידות:

ניסוי ברנולי Ber(p): **ניסוי בעל שתי תוצאות**

האפשריות: 'הצלחה'- S **ו'כישלון'-** F **:**

$bin\ /\ n$ $Var(X)=pq$ $EX=p$.

התפלגות בינומית Bim(n,p): **ההסתברות לקבל בדיוק** k **הצלחות בסדרה של** n **ניסויים שלכל אחד הסתברות הצלחה** p . $P(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

סכום בינומים: אם $X\sim B(n,p)$ **וגם** $Y\sim B(m,p)$

(אותו p **בשניהם) אז:** $X+Y\sim B(m+n,p)$

התפלגות גיאומטרית Geo(p):

ההסתברות להצלחה ראשונה בנסיון ה- k **כאשר הסתברות ההצלחה בכל ניסוי היא** p . $p(k)=q^{k-1}p$

חוסר זיכרון: אם ידוע שלא הייתה הצלחה עד לניסוי ה-m אז ההסתברות כי היא תקרה בניסוי m+k הינה עדיין כמו בנוסחה.

התפלגות בינומית שלילית NB(m,p):

ההסתברות לקבל את ההצלחה ה- m **-ית בדיוק בניסיון ה-** k **כאשר לכל ניסוי הסת' הצלחה** p .

$p(k)=\binom{k-1}{m-1}p^m q^{k-m}$ **כמו סכום של גיאומטרי**

התפלגות היפר-גיאומטרית HG(N,D,n): **בכד נמצאים** N **כדורים שחורים ו-** M **כדורים לבנים. מוציאים** n **כדורים באקראי ללא החזרה. ההסתברות שבין הכדורים שהוצאו נמצאים** k **כדורים שחורים.**

$$P(k) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad n<N, D<N$$

מרובה סוגים: כאשר $n_1 + .. + n_k = n$ **ובוחרים** n **מ** N.

$$P(n_j \text{ of type } 1\le j\le k) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdot\ldots\cdot\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

קירוב בינומי להיפר גיאומטרי: כאשר N **גדול מאוד ביחס ל-** n **, אזי תוצאת החישוב עם ההחזרה (הבינומית) קרובה לתוצאת החישוב בלי החזרה (ההיפר גיאומטרית).** $p=D/N,\ n=n$.

$$X\sim HG(n,N,M) \Rightarrow X\sim Bin\left(n,\frac{M}{N+M}\right)$$

התפלגות פואסון בדידה Pois(λ): **מספר האירועים ביחידת זמן נתונה, אם ידוע כי הם מתרחשים בקצב ממוצע קבוע** $\lambda>0$ **ובאופן ב"ת בפרק הזמן מאז האירוע האחרון.** $p(k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

מירוץ פואסון: $X_1|X_1+X_2=n\sim Bin\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

קירוב פואסוני לבינומי: כאשר n גדול ו-p קטן אז ניתן לקרב את הבינומי לפואסוני עם $\lambda = np$.

הערה! ניתן לעשות קירוב נורמלי לבינומי-מג"מ!

סכום פואסונים ב"ת: $X\sim Pois(\lambda)$ **,** $Y\sim Pois(\mu)$

$(X+Y)\sim Pois(\lambda+\mu)$.

פיצול פואסון: אם $Z\sim Pois(\mu)$ **ואז מתרחש אחד משני מאורעות בהסתברויות** $p_a + p_b = 1$ **אז נקבל מ"מים ב"ת שמתפלגים** $Pois(p_a\cdot\mu), Pois(p_b\cdot\mu)$.

ב"ת!: מתקיים פיצול לכל שתי אפשרויות של "האנשים" שמגיעים. אלו שני פואסון ב"ת!

התפלגות מולטינומית Multi(n,p1,p2…pk):

דוגמא: הוצאת n כדורים ב-k צבעים, עם החזרה. מבצעים n **ניסויים ב"ת. לכל ניסוי קיימות** k **תוצאות אפשריות כך שהסתברות לתוצאה** i **היא** p_i **ומתקיים:** $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. x_i **- מספר התוצאות מסוג** i **שהתקבלו ב-** n **ניסויים.**

$$p_{x_1\cdots x_k}(x_1,\cdots,x_k)=\begin{cases}\frac{n!}{x_1!\cdots x_k!}p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k} & \sum_{i=1}^{n} x_i=n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

מולטינומי מותנה: אם X_1, X_2, X_3 **סופרים מאורעות עם הסתברות** $p_1, p_2, p_3, p_1+p_2+p_3=1$ **אז עבור**

$X\sim Multi(n,p_1,p_2,p_3)$ $(X_1\mid X_2=k)\sim Bin\left(n-k,\frac{p_1}{1-p_2}\right)$

התפלגות אחידה Uni(k,n): **כל ערך מתוך טווח ערכים מסוים, מתקבל באותה הסתברות.**

התפלגות משותפת ושולית:

התפלגות משותפת: חיתוך המאורעות $P(X=x,Y=y)=P_{XY}(x,y)$

התפלגות שולית: $P_X(x)=\sum_y P_{XY}(x,y)$

אי-תלות מ"מ בדידים:

מ"מ הם ב"ת אם"ם $\forall x,y:\ P_{XY}(x,y)=P_X(x)\cdot P_Y(y)$

אם הסתברות משותפת היא מכפלת שתי פונקציות, האחת של x **והשנייה של** y**,** $f(x)\cdot g(y)$ **אזי ניתן להסיק שקיימת אי-תלות בין המשתנים.**

הערה: פונקציות ותת-קבוצות זרות של מ"מ בלתי תלויים הן בלתי תלויות.

סטטיסטי הסדר: נתונים $X_1\cdots X_n$.

סטטיסטי הסדר שלהם: $X_{(1)}\le\cdots\le X_{(n)}$.

אם הנתונים אקראיים אז סטטיסטי הסדר הם מ"מ. מ"מ ב"ת- סטטיסטי הסדר כן תלויים.

min, max במקרה הרציף:

$$F_{(1)}=P(\min X_i<x)=1-P(\min X_i>x)=1-(1-F(x))^n$$

$$f_{(1)}(x)=\frac{\partial}{\partial x}F_{(1)}=nf(x)(1-F(x))^{n-1}$$

$$F_{(n)}=P(\max X_i<x)=(F(x))^n$$

$$f_{(n)}(x)=\frac{\partial}{\partial x}F_{(n)}=nf(x)(F(X))^{n-1}$$

$$f_{(k)}(x)=n\binom{n-1}{k-1}f(x)F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}$$

פונקצית צפיפות משותפת:

$$f_{X_{(1)},\cdots,X_{(n)}}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}n! & 0\le x_1\le\cdots\le x_n\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

סטטיסטי הסדר מתפלג: $\beta(k,n-k+1)$.

תוחלת: $E(X)=\sum_{x\in R_X} xP(X=x)$ $\left(\sum_x |x|\cdot P(X=x)<\infty\right)$

$E(X+Y) = EX + EY \quad E(aX+b) = aEX + b$

$E(g(X,Y)) = \sum_x\sum_y g(x,y)\cdot P(X=x, Y=y)$

$E(g(X)) = \sum_x g(x)\cdot P(X=x)$

כלל הכפל: אם X,Y **ב"ת אז** $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ **זוג מ"מ שמקיים את הנוסחה: בלתי מתואמים.**

לכל שני מ"מ: $E(XY)=\sum_x\sum_y xyP(X=x,Y=y)$

חוק המספרים הגדולים: עבור X_i **ב"ת ו-**

$EX_i = \mu$ **אז:** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\to\mu$ **החלש: לכל** $\varepsilon>0$

$P(|\bar X_n-\mu|\ge\varepsilon)\to 0$ **החזק:** $P\left(\lim_{x\to\infty}|X_n-\mu|=0\right)=1$

נוסחת הזנב: $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X\ge k)$ $(X\in\mathbb{N})$

תוחלת מותנית:

$E(X\mid Y=y) = \sum_x x\cdot P(X=x\mid Y=y)$,

$E(Y) = \sum_x E(Y\mid X=x)\cdot P(X=x)$

אם X,Y **ב"ת אז** $E(X\mid Y) = E(X)$

במקרה הרציף: $E(X\mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx$

נוסחת ההחלקה: $E(X) = \sum_y E(X\mid Y=y)\cdot P(Y=y)$

אם $E(X\mid Y) = g(Y)$ **אז** $E(X)=E(E(X|Y))=E(g(Y))$

במקרה הרציף

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_{Y|X}(y|x)dy\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\cdot E(Y|X=x)dx$$

נוסחאות נוספות: $E(X+Y|Y) = E(X|Y) + Y$

$E(X+Y\mid Y=y) = E(X\mid Y=y) + y$

$E(XY\mid Y=y) = y\cdot E(X\mid Y=y)$ $E(XY\mid Y) = Y\cdot E(X\mid Y)$

$E(X^2) = E(E(X^2\mid Y=y))$ $E(XY) = E(E(XY\mid Y=y))$

$E(X^2|Y=y) = Var(X\mid Y=y) + (E(X|Y=y))^2$

משפט wald: X_i **ב"ת** $EX_i=\mu$ **. N מ"מ ב"ת בכל ה-** X_i **,** $S_N=X_1+\cdots+X_N$ $E(S_N)=EX\cdot EN=\mu\cdot EN$

שונות וסטיית תקן:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$$

$Var(aX+b) = a^2\cdot Var(X)$

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

אם X,Y **ב"ת:** $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ **וגם**

$Var(X|Y)=Var(X)$ **.** c **קבוע אמ"מ** $Var(c) = 0$.

$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$ $SD(aX+b) =|a|\cdot SD(X)$

שונות מותנית: $Var(Y|X) = E\left((Y-E(Y|X))^2|X\right)$

$$Var(Y) = E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X))$$

קו-ואריאנס: $Cov(X,X) = Var(X)$

$$Cov(X,Y) = E((X-\mu_x)(Y-\mu_y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{2}(Var(X+Y)-Var(X)-Var(Y))$$

1) **אם** X **ו-** Y **ב"ת אז** $Cov(X,Y) = 0$.
בד"כ ההיפך לא נכון $Cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X,Y$ **ב"ת.**
2) **אם** $Cov(X,Y) = 0$ **אז** X,Y **בלתי מתואמים.**
ב"ת $\Rightarrow$ **בלתי מתואמים. (ההפך לא הכרח נכון).**
3) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ **- סימטריות.**
4) $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y)$.
5) $Cov(X, Y+Z) = Cov(Y,X) + Cov(X,Z)$.
6) **לכל** a **קבוע** $Cov(X,a) = 0$.

מקדם המתאם:

$$Corr(X,Y) = \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{SD(X)\cdot SD(Y)}$$

1) $-1\le\rho(X,Y)\le 1$.
2) $Corr(X,Y) = 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0$.
3) $Corr(X,X) = 1$.
4) $Corr(aX+b, cY+d) = (sign(ac))\cdot Corr(X,Y)$.
5) $\rho(aX, bY) = \rho(X,Y)$.
6) **אם** $|\rho(X,Y)| = 1$ **אז קיימים** λ **ו-** μ **כך ש-** $X = \lambda Y + \mu$ **(התלות בין** X **ל-** Y **ליניארית).**

תקנון: $X^*=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ **, כאשר:** $Corr(X,Y)=E(X^*Y^*)$

אופי התלות בין מאורעות:

$Cov(A,B) > 0$ **תלות חיובית.**

$Cov(A,B) < 0$ **תלות שלילית.**

$Cov(A,B) = 0$ **בלתי תלויים.**

פונקציה יוצרות: פי"מ: $M_X(t) = E(e^{tx})$

לבדיד: $M_X(t)=\sum_x e^{tX}P(X=x)$

לרציף: $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\cdot f_x(x)dx$

פי"מ מגדירה התפלגות מ"מ, אבל כל המומנטים ללא הפונקציה לא יכולים לקבוע התפלגות.

1) **אם** $M_X = M_Y$ **עבור** $t\in(-\delta,\delta)$ **אז ל-** X **ול-** Y **אותה התפלגות.**
2) **נגזרות=מומנטים** $\frac{d^k}{dt^k}M_X|_{t=0} = E(X^k)$.
3) **אם** X **ו-** Y **ב"ת אז** $M_{X+Y} = M_X\cdot M_Y$.
4) a,b **קבועים אז:** $M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_x(at)$.

יוצרת הסתברות: $g_X(s)=E(s^X)=\sum_x s^xP(X=x)$

$Pois(\lambda)$: $g_x(s)=e^{-\lambda(1-s)}$ $\frac{\partial^k g_X}{\partial s^k}(s=0)=k!P(x=k)$

Wald נוסף: עבור $X_1,\cdots,X_N$ **ב"ת, ש"ה וב"ת ב-** N **אז:** $g_{X_1+\cdots+X_N}(s)=g_N(g_{X_1}(s))$

גם עבור פי"מ: $M_{X_1+\cdots+X_N}(t) = M_N(M_{X_i}(t))$

פונ' אופיינית: $\phi(\theta)=E(e^{i\theta X})\sum e^{i\theta x}p(x)$

תהליכי הסתעפות:

g **- פונ' יוצרת הסתברות של** Cv **.** $ECv=\mu$.

Zi **- מספר צמתים ברמה ה-** i **.** $Z_0=1$.

g_i **- פונ' יוצרת הסתברות של** Zi .

$g_0(s)=s,$ $g_i(s)=g_{i-1}(g(s))=g(g(g(\cdots(s)\cdots)))$

$E(Zi) = \mu^i$ $Var(Z_i) = \begin{cases} i\sigma^2 & \mu = 1\\ \sigma^2\mu^{i-1}\frac{\mu^i-1}{\mu-1} & \mu\ne 1\end{cases}$

אינדיקאטורים:

אינדיקטור של מאורע A- מ"מ:

$I_A=\begin{cases}1 & A\ happened\\ 0 & else\end{cases}$ - $E(I_A) = E(I_A^2) = P(A)$

$Var(I_A) = P(A)(1-P(A)) = pq$

$Cov(I_A, I_B) = E(I_AI_B) - E(I_A)E(I_B)$

$= P(A\cap B) - P(A)P(B)$

שימוש בתוחלת אינדיקטורים לחישוב

הסתברות: $E(I_A\cdot I_B) = P(A\cap B)$.

אינטגרלים: $\int_0^\infty \lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=1$ **,** $\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$

$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$ $\int_0^\infty S^{n-1}\cdot e^{-S}dS=(n-1)!$

התפלגויות רציפות:

פונקצית הצפיפות:

$$P(X\in[a,b]) = P(a\le X\le b) = \int_a^b f_x(x)dx$$

$$F_X(x) = P(X\le a) = \int_{-\infty}^{a} f_x(x)dx$$

$P(a\le X\le b) = P(X\le b) - P(X\le a)$

אם $f_x(x)$ **פונקצית צפיפות של** X **מ"מ רציף**

אז $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$ **ותמיד** $f_x(x)\ge 0$.

הסת' שלמה: $f_X(x)=\sum_k f_{X|Y}(x|Y=k)P(Y=k)$

תוחלת של רציף: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_x(x)dx$.

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_x(x)dx$$

התוחלת קיימת רק כאשר $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f_x(x)|dx<\infty$.

נוסחת הזנב

$$E(X) = \int_0^\infty (1-F_x(x))dx = \int_0^\infty P(X>x)dx$$

לשים-לב: באזורים בהם $F_x(x)=0$ **, אז** $\int 1$.

שונות של רציף:

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_X(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)dx\right)^2$$

פונקצית התפלגות מצטברת:

הגדרה: $F_x(x) = P(X \le x)$.

בדיד: $F_x(x) = \sum_{t \le x} P(X = t)$ **רציף:** $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx$

1) $0 \le F_x(x) \le 1$. 2) $F_x(x)$ לא יורדת.

3) $\lim_{x\to-\infty} F_x(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} F_x(x) = 1$.

4) $F_x(x)$ רציפה מימין. 5) $f_x(x) = \frac{d}{dx}F_x(x)$.

6) $F_X(x) \sim Uni[0,1]$ לכל פונקציה.

אם $E(X) < \infty$ אז $\lim_{x\to\infty} x\cdot(1-F_x(x)) = 0$.

התפלגות נורמלית: שימוש בטבלה עבור מ"מ נורמלי

$Z \sim N(0,1)$ $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-z^2/2}$

$P(a \le Z \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ $F_X \to P(Z \le a) = \Phi(a)$

סכום נורמלים: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ו- $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

ב"ת אז $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

מנת נורמלים: מתפלגת קושי. **נורמלי בריבוע:** גאמא

משפט הגבול המרכזי: $X_1, X_2, \dots, X_n$ מ"מ ב"ת, ש"ה,

$E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$ **נגדיר:** $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **אז:**

$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$ **כלומר** $\overline{X_n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

כלומר $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \le a\right) = \Phi(a)$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $N(n\cdot\mu, n\sigma^2)$ $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \to N(0,1)$

קירוב נורמלי להת' בינומית: ע"י שימוש במשפט הגבול המרכזי נגדיר אינדיקטורים ($n \cdot p > 5$):

$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow X = \sum I_j \Rightarrow X \sim N(np, npq)$

התפלגות אחידה (יוניפורמית): $U[0,1] \to f_X(x) = 1$

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ $F_X \to P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$

$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & otherwise \end{cases}$ $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

סטטיסטי הסדר: אם $X_1, X_2, \dots, X_n \sim U[0,1]$ **ב"ת:**

$(\min|\max = x) \sim Uni[0,x]$ $f_{\min}(x) = n(1-x)^{n-1}$ $f_{\max}(x) = nx^{n-1}$

$E(X_{\min}) = \frac{b}{n+1}$ $E(X_{\max}) = \frac{n}{n+1}$

סטנדרטיזציה: $U[0,1] \sim \frac{X-a}{b-a} \Leftrightarrow X \sim U[a,b]$

מעבר לאקספוננט: $\left(-\frac{\ln(1-U)}{\lambda}\right) \sim \exp(\lambda)$ כאשר $U[0,1]$

התפלגות אקספוננציאלית: זמן בין מאורעות פואסון.

$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $P(X > a) = e^{-\lambda a}$

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ $P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

מינימום של אקספוננט הוא אקספוננט:

$X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow Min(X,Y) \sim Exp(\lambda + \mu)$

תחרות בין אקספוננציאלים: X, Y ב"ת

$X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

סכום עם גיאומטרי: $X_i \sim \exp(\lambda)$, $N \sim Geo(p)$ **אז:**

$S_N = \sum_{i-1}^{N} X_i \sim \exp(\lambda p)$

תכונת חוסר זיכרון: אם נתון כי עד רגע t לא היה מופיע, אז הזמן עד למופע הבא "מתחיל מהתחלה"

$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$ $E(X - Y | X > Y) = EX$.

משפט: נתון מ"מ T, נגדיר $G(t) = P(T > t)$.

אם $G(t+s) = G(t) \cdot G(s)$, קיים λ כך ש $T \sim Exp(\lambda)$.

התפלגות Gamma: $X_1, X_2, \dots, X_n$ מ"מ ב"ת,

$X_i \sim Exp(\lambda)$, נגדיר $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, אזי $Y \sim Gamma(n, \lambda)$.

$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} & x \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\Pi}$ $Gamma(1,\lambda) = \exp(\lambda)$

כאשר n שלם: $\Gamma(n) = (n-1)!$

חיבור Gamma: אם $X \sim Gamma(r, \lambda)$,

$Y \sim Gamma(s, \lambda)$ ב"ת אז $X + Y \sim Gamma(r+s, \lambda)$.

חילוק Gamma: עבור X, Y כנ"ל יתקיים

$\frac{X}{X+Y} \sim Beta(r,s)$. באופן כללי מנת גאמות היא בטא. המנה והסכום בשני הנ"ל ב"ת.

הקשר בין אקספוננציאלי פואסוני ו-Gamma: יהי

N_t מספר ההופעות בקטע $[0,t]$ Ti זמן המופע ה-

I; $(T_i - T_{i-1})$ - זמן בין מופעים.

אם $Nt \sim Poisson(\lambda t)$ אז $(T_i - T_{i-1}) \sim Exp(\lambda)$ ו-

$Ti \sim Gamma(i, \lambda)$.

אם $(T_i - T_{i-1}) \sim Exp(\lambda)$ וב"ת אז $Nt \sim Poisson(\lambda t)$.

ממקרים אלו נסיק נוסחא להסת' גאמא:

$P(Ti > t) = P(N_t \le i-1) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$

משמעות: ההסת' שהמאורע ה-i יקרה אחרי זמן-t שווה להסתברות שעד לזמן-t קרו לכל היותר i-1 מאורעות.

התפלגות Cauchy: צורה כללית $f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$.

התפלגות חי בריבוע: $X \sim \chi^2$ למעשה אומר כי

$X \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (N(0,1))^2$. סכום של n

משתנים כאלו $Y = \sum X_i^2$ יתפלג $Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

התפלגות בטא:

$f_x(x) = x^{r-1}(1-x)^{s-1} / B(r.s)$ $0 \le x \le 1$

$B(r,s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{r-1}dx = \frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}$

$= \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$ $(U|X=k) \sim Beta(k+1, n-k+1)$ $X \sim Bin(n,u)$

$X \sim Uni[0,1] \to X^2 \sim Beta\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $X \sim Beta(1,1)$

התפלגות משותפת רציפה של שני מ"מ:

לוקטור (x,y) **פונקצית צפיפות** f אם לכל תת

קבוצה של R^2: $P((x,y) \in A) = \iint_A f_{xy}(t,s)dtds$

$P(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy) = f_{xy}(x,y)dxdy$

1) $f \ge 0$. 2) $\iint_{R^2} f_{xy}(x,y)dxdy = 1$.

שיטות למציאת צפיפות משותפת:

- ע"י $P(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy) = f_{xy}(x,y)dxdy$.

- ע"י מציאת $F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y)$ וגזירתה.

3) **פונקצית הצפיפות השולית** $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy$.

התפלגות מצטברת משותפת:

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv$

4) **פונקצית הצטברות שולית** $F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$

תלות: X, Y ב"ת אמ"מ $f_{xy}(x,y) = f_x(x)f_y(y)$ או

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

תוחלת: $E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$

תוחלת שולית: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{XY}(x,y)dxdy$

כלל הכפל: $f_{xy}(x,y) = f_{Y|X}(y|X=x)f_X(x)$

אם ניתן להפריד את $f_{X,Y}(x,y)$ למכפלת שתי

פונקציות באופן הבא: $f_{X,Y}(x,y) = g(x) \cdot h(y)$

ותחומיהם השוליים של X, Y אינם תלויים, כלומר

התחום המשותף של (X,Y) הינו מלבן המקביל

לצירים, אזי X, Y הם ב"ת ו- $g(x), h(y)$ הן

פונקציות הצפיפות של X, Y עד כדי קבוע.

צפיפות, הסתברות ותוחלת מותנית:

צפיפות מותנית: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

כללי הסתברות: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$

$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt$ prob ↓ calc

$P(a \le X \le b|Y = y) = \int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx$ $P(A) = \int_x P(A|X=x)f_X(x)dx$

שולית מהמותנית: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)dy$

בייס:

$f(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx}$, $f_X(x|A) = \frac{P(A|X=x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(A|x)f_X(x)dx}$

תוחלת מותנית: $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx$

פונקצית התפלגות הפוכה- סימולציה:

במקרה הבדיד $F^{-1}(p) \equiv \inf\{x : F(x) \ge p\}$

במקרה הרציף $F^{-1}(p) = x : F(x) = p$

בהינתן משתנה $U \sim U[0,1]$ נרצה לקבל תצפית ממשתנה רציף X כאשר F שלו נתונה. ע"י הגדרת $X = F^{-1}(U)$ וחילוץ של X נסמלץ משתנה בדיד.

דוגמא: נרצה ליצור משתנה $X \sim \exp(\lambda)$. יתקיים

$F_X(X) = 1 - e^{-\lambda x} \to F^{-1}(p) = \ln(1-p)/\lambda$

ומכאן $X = \left(\frac{-\ln(1-U)}{\lambda}\right) \sim \exp(\lambda)$ $\ln(U) \sim \exp(-1)$

טרנספורמציות:

טרנספורמציה חד-חד-ערכית של מ"מ רציף:

יהי X מ"מ רציף (דיפרנציאבילי) המקבל ערכים בקטע $[a,b]$. תהיה $g : R \to R$ פונקציה גזירה ועולה (יורדת) ב- $[a,b]$. אזי למ"מ Y המוגדר להיות $Y = g(X)$ יש את פונקצית הצפיפות הבאה:

$f_Y(y) = \begin{cases} f_x(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}\right| & g(a) \overset{(\ge)}{\le} y \overset{(\ge)}{\le} g(b) \\ 0 & otherwise \end{cases}$

ובפרט: $Y = a + bX \to f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_x\left(\frac{y-a}{b}\right)$

טרנספורמציה לא חח"ע של מ"מ רציף: כמו במקרה החח"ע, אך נסכום את התרומות השונות ל - Y.

עבור $X \sim f_X(x)$ ו- $Y = X^2$ נקבל

$g(x) = x^2, g'(x) = 2x$, $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ויתקיים

$Y = y \to X = \pm\sqrt{y}$ ואז

$f_Y(y) = \sum_{x:x=\pm\sqrt{y}} f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}\right| =$ כאשר החלוקה

$\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] / (2\sqrt{y})$

תמיד ב - $2\sqrt{y}$ בשל הערך המוחלט.

טרנספורמציה דו-מימדית:

יהי (X,Y) מ"מ דו מימדי רציף בעל פונקצית צפיפות משותפת $f_{xy}(x,y)$. תהיינה $v = g_2(x,y)$ ו- $u = g_1(x,y)$ פונקציות ממשיות על המישור שהן חח"ע וגזירות, כך שקיימות הפונקציות ההפוכות $x = h_1(u,v)$ ו- $y = h_2(u,v)$. נגדיר יעקוביאן:

$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}$ $g_1\ U = \frac{Y}{X}$ $h_1\ X = \sqrt{\frac{V}{U}}$ $g_2\ V = XY$ $h_2\ Y = \sqrt{UV}$

פונ' הצפיפות המשותפת של $V = g_2(X,Y)$, $U = g_1(X,Y)$ היא:

$f_{UV}(u,v) = f_{xy}(h_1(u,v), h_2(u,v))|J(u,v)|$

עבור מ"מ $U = g_1(X,Y)$ ניתן לכתוב מ"מ נוסף $V = X$ או $V = Y$ לבצע טרנספורמציה דו מימדית עבור U, V ולמצוא צפיפות שולית של U ע"י אינטגרציה.

מעבר לפולאריות: $f_{R\theta}(r,t) = r \cdot f_{xy}(r\sin t, r\cos t)$

טרנספורמציות ליניאריות:

$\hat{Y} = A\hat{X}$, $\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ נניח ש- A^{-1}

קיימת אז $X = A^{-1}Y$. $f_{\hat{Y}}(\hat{y}) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_{\hat{X}}(A^{-1}\hat{y})$

קונבולוציה:

אם X, Y מ"מ ב"ת, $Z = X + Y$

מקרה בדיד: $P(Z = z) = \sum_x P(Y = z-x)P(X = x)$

בדיד, X, Y **תלויים:** $P(Z = z) = \sum_x P(Y = z-x, X = x)$

מקרה רציף: $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)f_y(z-x)dx$.

רציף, X, Y **תלויים:** $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, z-x)dx$.

תכונת חוסר זיכרון: מתקיימת רק בהתפלגויות פואסון, אקספוננציאלית, גיאומטרית.

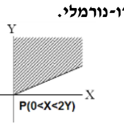
גמא ואקספ' תמיד גדולים מ-0: הסתברות שזמן עד למאורע יהיה גדול מ-0 היא-1.

הסתברות לאי-שוויון בין מ"מ: להשתמש בחוק ההסתברות השלמה ולהתנות על המ"מ שבצדדים. נורמלים ב"ת: להעביר אגף- מ"מ דו-נורמלי.

עבור שני נורמלים סטנדרטיים

ב"ת: לעבור לפולאריות:

$\theta \sim U[0, 2\pi]$ ואז מחשבים



גיאומטרית את הזווית ומחלקים

ב- $2\pi / 360$. **דוגמא:** $\theta = \frac{\arctan(2)}{360}$

התפלגות רב-נורמלית:

יהי $\hat{X} \sim N(\hat{\mu}, \Sigma)$. פונ' הצפיפות שלו:

$f_{\hat{X}}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma|^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\hat{x} - \hat{\mu})^t \cdot \Sigma^{-1}(\hat{x} - \hat{\mu})\right)$

מטריצת קווריאנס:

$\Sigma = E\left((X - EX)(X - EX)^t\right) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$

טרנספורמציה ליניארית של וקטור נורמלי:

$\hat{X} \sim N(\hat{\mu}, \Sigma)$, תהא מטריצה A וקטור b.

אם $\hat{Y} = A\hat{X} + b$ אזי $\hat{Y} \sim N(A\hat{\mu} + b, A\Sigma A^t)$

- כל התפלגות שולית של נורמלי היא נורמלית (כיוון שני אינון נכון).
- כל ק"ל של מ"מ שפילוגם המשותף נורמלי, מתפלג נורמלי.

נורמלי סטנדרטי בריבוע: מתפלג χ^2 = גמא.

משפט: משתנים שפילוגם המשותף נורמלי והם בלתי מתואמים, הם גם בלתי תלויים.

משפט: מ"מ ב"ת שפילוגם השולי נורמלי מפולגים יחד דו-נורמאלית עם $\rho = 0$.

התפלגות דו נורמלית:

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X\sigma_Y \\ \sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ $\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$ $\rho = Corr(X,Y)$

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\Pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} *$

$\exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right)$

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

המותנות הן גם נורמאליות:

$(Y|X=x) \sim N\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_x), \sigma_Y^2(1-\rho^2)\right)$

משפט: אם $(X,Y) \sim N(\mu, \Sigma)$ אז

$\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}, \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right) \sim N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$

בניה של מ"מ $(X,Y) \sim N(0,1)$ **:**

$Z, X \sim N(0,1)$ **ב"ת:** $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$ כאשר

$\rho = Corr(X,Y)$ ומקבלים:

$E(X) = E(Y) = 0$ $(Y|X=x) \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$

$(X|Y=y) \sim N(\rho y, 1-\rho^2)$

$E(Y|X) = \rho X$ $Var(Y|X) = 1 - \rho^2$

$E(X|Y) = \rho Y$ $Var(X|Y) = 1 - \rho^2$

אם X, Y מתפלגים דו-נורמלית אזי הם ב"ת אם ורק אם $\rho = Corr(X,Y) = 0$. עבור דו-נורמלי סטנדרטי $\rho = E(X \cdot Y)$.

חישוב $P(X > 0, Y > 0)$ **:** אם נתון $X, Y \sim N(0,1)$

ו- ρ : $P(X > 0, Y > 0) = \frac{90^\circ - \arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{360^\circ}$

התפלגות דו נורמלית סטנדרטית של מ"מ ב"ת בקואורדינטות פולאריות (ריילי):

$f_{R\theta}(r,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Pi} re^{\frac{-r^2}{2}} & r > 0, \theta \in [0, 2\Pi] \to \text{ב"ת} \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$f_R(r) = re^{\frac{-r^2}{2}}$ $F_R(r) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-r^2}{2}} & r \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$f_\theta(\theta) \sim U[0, 2\Pi]$ $R^2 \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$

בהינתן $U, V \sim Uni[0,1]$ ב"ת **ניצור נורמאלים:**

$\begin{cases} U \to 2\pi U = \theta \sim Uni[0, 2\pi] \\ V \to \sqrt{-2\ln(1-V)} = R \sim f_R(r) = \exp\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

ואז: $(R\cos\theta, R\sin\theta) = (X,Y) \sim N(0,1)$ ב"ת

אי שיוויונות להערכת הסתברות:

אי-שיוויון בול: $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

אי-שיוויון מרקוב: (X מ"מ אי-שלילי, a

כלשהו): $P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}$.

אי שיוויון צ'בשב: X מ"מ, $E(X) = \mu$,

$SD(X) = \sigma$

$P(|X - \mu| \ge k \cdot \sigma) \le \frac{1}{k^2}$ $P(|X - \mu| \ge a) \le \frac{Var(X)}{a^2}$

אי-שוויון ינסן: f קמורה $E(f(x)) \ge f(E(x))$