

תוצאות שוות סיכוי וחוקי הסתברות בסיסיים

הגדרות:

Ω - **מרחב המדגם**: אוסף כל התוצאות האפשריות של הניסוי.

מרחב מדגם בדיד: יש בו מספר סופי או בן מניה של תוצאות.

מרחב מדגם שווה הסתברות: מרחב הסתברות (Ω, P) שבו לכל מאורע פשוט יש אותה הסתברות ו- Ω הוא סופי. **דוגמא**: הטלת מטבע הוגן. וגם מתקיים: $\forall \omega \in \Omega$, הסתברות שווה להתרחש והיא

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} \text{ ועבור מאורע } A \text{ - } P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

מאורע: תת-קבוצה של מרחב המדגם (מסומן באות גדולה).

מאורע פשוט: מאורע המכיל רק תוצאה אחת, לרוב נסמנו- ω . **דוגמא**: $C = \{5\}$ בהטלת קובייה.

מידת הסתברות: פונקציה מאוסף המאורעות של Ω ל- $[0, 1]$

P צריכה לקיים 3 תנאים:

1. P אי-שלילית, כלומר $P(A) \geq 0$ לכל מאורע A .

2. אם A_1, \dots, A_n הם חלוקה של A (כלומר A_i זרים ואיחודים הוא A), אזי:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. $P(\Omega) = 1$.

תכונות נוספות של מידת הסתברות:

$$P(A) \leq 1 \quad -$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad -$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad -$$

- אם $A \subset B$, אז: 1. $P(A) \leq P(B)$ 2. $P(B \setminus A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \quad \textbf{כלל הכלה והפרדה:}$$

$$\boxed{P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}$$

נוסחה כללית:

$$\boxed{P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)} \quad \textbf{חוק Boole:} \quad \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)}$$

הסתברות מותנית ואי תלות

הסתברות מותנית:

יהיו A, B מאורעות, כך ש- $P(B) > 0$. ההסתברות המותנית של A בהינתן B מסומנת ע"י:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)} \quad \text{כלל הכפל:}$$

כלל ההסתברות השלמה: תהי B_1, B_2, \dots, B_n חלוקה זרה וממצה של Ω . כלומר:

$$1. \quad \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega \quad 2. \quad \forall i \neq j: B_i \cap B_j = \emptyset \quad 3. \quad \forall i: B_i \neq \emptyset$$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i)}$$

יהיה A מאורע. אז:

כלל Bayes: יהיו B_1, B_2, \dots, B_n חלוקה של Ω ויהא B_j מאורע כלשהו מתוך חלוקה זו. אם A

מאורע עבורו מתקיים: $P(A) > 0$ אזי מתקיים:

$$(פירוק המכנה לפי הסתברות שלמה). \quad P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) \cdot P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A | B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i)}$$

אי תלות:

נאמר שמאורעות A, B בלתי תלויים אם הסיכוי להתרחשות A אינו משופע מהידיעה אם מאורע B

התרחש או לא התרחש ולהפך. A, B בלתי תלויים אם מתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\boxed{P(A) = P(A | B) = P(A | B^c)} \\ \boxed{P(B) = P(B | A) = P(B | A^c)}$$

הסתברות מותנית עבור מאורעות בלתי תלויים:

הערות:

- \emptyset ו- Ω תמיד בלתי תלויים עם מאורע אחר.
- מאורעות זרים שאינם ריקים הם תלויים - $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ אבל: $P(A) \cdot P(B) > 0$ ולכן לא מתקיימת האי-תלות.
- מאורעות מוכלים שאינם ריקים ואינם שווים ל- Ω - תלויים.
- מאורעות בלתי תלויים שאינם ריקים - נחתכים

חוקי דה-מורגן:

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad -$$

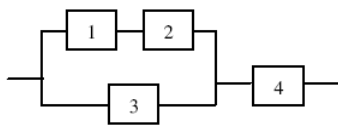
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad -$$

אמינות מערכת:

מערכת מורכבת ממספר רכיבים. תהי p_i ההסתברות שהרכיב i תקין. נניח כי כל הרכיבים תקינים או תקולים באופן בלתי תלוי באחרים. נסמן- a , האמינות של המערכת, להיות ההסתברות שהמערכת תקינה.

1. **מערכת טורית:** n רכיבים מחוברים בטור. דרוש שכל הרכיבים יהיו תקינים כדי שהמערכת תהיה תקינה, $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ (ההסתברות לחיתוך- מכפלת ההסתברויות שכן הרכיבים ב"ת).

2. **מערכת מקבילית:** n רכיבים מחוברים במקביל. מספיק שאחד מן הרכיבים יהיה תקין כדי שהמערכת תהיה תקינה, במילים אחרות- דרוש שכל הרכיבים יהיה תקולים כדי שהמערכת תהיה תקולה. $a = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$



3. **מערכת מעורבת:** עבור המערכת הנתונה-

$$a = (1 - (1 - p_3)(1 - p_1 p_2)) \cdot p_4$$

ניסויים בלתי תלויים- התפלגויות

ניסוי ברנולי:

ניסוי בעל שתי תוצאות אפשריות: הצלחה- S , $P(S) = p$ וכישלון- F , $P(F) = 1 - p = q$

התפלגות בינומית: $\text{Bin}(n, P)$

נתון מרחב המדגם $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ ועליו מוגדת מידת ההסתברות:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

מודל בינומי של ניסויים: מבצעים סדרה של n ניסויי ברנולי ב"ת, בעלי הסתברות להצלחה- p .

ההסתברות לקבל בדיוק k הצלחות ב- n הניסויים היא $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

התפלגות גיאומטרית: $\text{Geo}(P)$

נתון מרחב המדגם בן-מנייה $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ ועליו מוגדת מידת ההסתברות:

$$P(k) = q^{k-1} p$$

מודל גיאומטרי של ניסויים: מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי ב"ת על להצלחה ראשונה. ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסיון ה- k , היא $q^{k-1} p$.

תכונת חוסר הזיכרון למודל גיאומטרי: אם ידוע כי לא הייתה הצלחה עד לניסיון ה- m , ההסתברות שההצלחה הראשונה תתרחש בניסיון ה- $m+k$ היא עדיין $q^{k-1} p$.

התפלגות בינומית שלילית: $\text{NB}(m, P)$

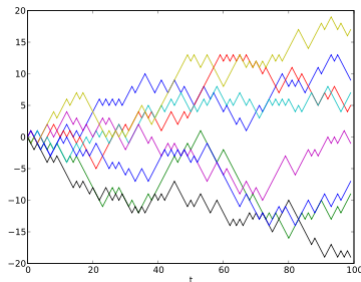
נתון מרחב המדגם בן-מנייה $\Omega = \{m, m+1, \dots\}$ ועליו מוגדרת מידת ההסתברות (עבור m מסוים):

$$P(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} \quad \forall k \in \Omega$$

מודל בינומי שלילי: מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי ב"ת עד להצלחה ה- m -ית. ההסתברות לכך

שהצלחה זו תתקבל בדיוק בניסיון ה- k היא $\binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$.

הילוך אקראי: מסלול המכיל שלבים עוקבים וקשורים שבו כל בחירת כל שלב היא אקראית ואינה מושפעת מהשלבים הקודמים.



דגימות מקריות והתפלגות פואסונית

דגימות מקריות:

1. פיזור של r עצמים שונים ל- n תאים: $|\Omega| = n^r$

שקול לדגימת r עצמים מתוך n עם חזרות, עם חשיבות לסדר.

2. פיזור של r עצמים זהים ל- n תאים: $|\Omega| = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$

שקול לדגימת r עצמים זהים מתוך- n עם חזרות ובלי חשיבות לסדר.

3. פיזור של r עצמים זהים ל- n תאים כך שכל תא יש לכל היותר עצם אחד

שקול לדגימת r עצמים מתוך n בלי חזרות, בלי חשיבות לסדר. $|\Omega| = \binom{n}{r} \quad r \leq n$

התפלגות פואסון:

נתון מרחב מדגם $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ ועליו מוגדרת מידת ההסתברות $P(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \lambda > 0$

מודל פואסוני: מספר האירועים ביחידת זמן נתונה, אם ידוע כי האירועים מתרחשים בקצב (מספר אירועים ליחידת זמן) ממוצע קבוע $\lambda > 0$ ובאופן בלתי תלוי בפרק הזמן מאז האירוע האחרון. במקום יחידת זמן נתונה, ניתן לחשוב גם על יחידת מרחק, שטח או נפח נתונה.

התפלגות פואסונית מתקבלת מהתפלגות בינומית $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np = \lambda}} \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

(כלומר, מבצעים סדרה ארוכה מאוד של ניסויי ברנולי ב"ת כאשר ההצלחה היא בהסתברות מאוד קטנה כך ש- $np = \lambda$).

קירוב פואסוני להתפלגות בינומית: הקשר בין ההתפלגויות מאפשר להשתמש בהתפלגות הפואסונית כקירוב להתפלגות הבינומית (שבמקרים רבים החישוב שלה מסורבל).

תהי התפלגות בינומית עם פרמטרים n ו- p . אם n גדול, p קטן ו- $np < 10$ אז ניתן לקרב את מידת ההתפלגות הבינומית לזו של התפלגות פואסונית עם פרמטר: $\lambda = np$.

התפלגות היפר-גיאומטרית:

נתון מרחב מדגם $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, \min\{D, n\}\}$ ועליו מוגדרת מידת ההסתברות:

$$P(k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad n < N, D < N, n, D, N \in \mathbb{N}$$

מודל היפר-גיאומטרי: בתוך כד יש N כדורים שמתוכם D שחורים והשאר לבנים. מוציאים n כדורים באקראי (ללא החזרה). מספר הכדורים השחורים מבין הכדורים שהוצאו מפולג היפר-גיאומטרית עם פרמטרים N, D, n .

סכום סדרה הנדסית אינסופית: $S_\infty = a_1 \frac{q^0 - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$

משתנה מקרי בדיד והתפלגותו

הגדרות:

משתנה מקרי: מ"מ X הוא פונקציה ממרחב המדגם Ω אל הישר הממשי R . $X : \Omega \rightarrow R$.
 סימון מאורע: את המאורע $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ נסמן- $\{X = x\}$, כלומר: אם יוצאת התוצאה ω , אז X מקבל את הערך $x = X(\omega)$.

מ"מ בדיד: מ"מ שהטווח שלו סופי או בן מניה- כאשר R_x (אוסף כל הערכים שהמ"מ יכול לקבל) מהווה קבוצה סופית או בת מנייה.

הערה: אם לכל קבוצה חלקית B בטווח של משתנה מקרי- X מגדירים מאורע: $P(x \in B)$ אז הסתברותו: $P(x \in B) = \sum_{x \in B} P(X = x)$ (מאורעות זרים וניתן לסכום הסתברויות).

פונקצית הסתברות של מ"מ: פונקצית הסתברות של מ"מ X היא פונקציה $P(X = x)$ או $p_x(x)$. כאשר $P(X = x)$ זאת ההסתברות של מאורע $\{X = x\}$. ותמיד מתקיים:

$$1. \quad \forall x, 0 \leq P(X = x) \leq 1$$

$$2. \quad \sum_{x \in R} P(X = x) = 1$$

$$3. \quad \forall A \subset R, P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

הערה: פונקצית הסתברות אינה אקראית אלא מוגדרת באופן חד-משמעי עבור כל ערך x שמ"מ X יכול לקבל. על-מנת לקבוע את ההתפלגות של מ"מ, מספיק למצוא את ההסתברויות עבור כל ערכי המשתנה.

פונקציה של משתנה מקרי: אם X הוא מ"מ ו $g : R \rightarrow R$ פונקציה, אז ניתן להגדיר מ"מ חדש: $Y = g(X)$ המתקבלת ע"י הפעלת הפונקציה g על ערך של X .

$$P(Y = y) = \sum_{x \in R_x : g(x) = y} P(X = x)$$

דוגמאות לפונקציות התפלגות ידועות:

$$X \square Ber(p) \text{ סימון: } p_X(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q & x = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ ברנולי:}$$

$$X \square Bin(n, p) \text{ סימון: } p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ בינומית:}$$

$$\text{סימון: } p_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0, 1, \dots, \min(D, n) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ היפר-גיאומטרית:}$$

$$X \square HG(N, D, n)$$

$$X \square Geo(p) \text{ סימון: } p_X(x) = \begin{cases} q^{x-1} p & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ גיאומטרית:}$$

$$X \square Uni(k, N) \text{ סימון: } P(X = x) = \begin{cases} \frac{k}{N} & x \in \{1, 2, \dots, N\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \text{ אחידה:}$$

$$X \square Pois(\lambda) \text{ סימון: } p_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ פואסונית:}$$

$$n \rightarrow \infty, np = \lambda, P(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cong \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \text{ קירוב פואסוני לבינומי:}$$

מספר משתנים מקריים- שולית, מותנית ואי-תלות

התפלגות משותפת של מ"מ (בדידים):

הגדרה: בהינתן שני משתנים מקריים X ו- Y המוגדרים על אותו מרחב מדגם, ההסתברות המשותפת של הזוג הסדור (X, Y) תסומן ע"י: $P(X = x, Y = y) = P_{XY}(x, y)$. שזהו חיתוך המאורעות.

$$0 \leq P_{XY}(x, y) \leq 1 \quad -$$

$$\sum_{(x,y)} P_{XY}(x, y) = 1 \quad -$$

התפלגות שולית: (זהו למעשה איחוד של מאורעות זרים- $\{X = x, Y = y\}$ $y \in R_Y$). $\{X = x\} = \bigcup_{y \in R_Y} \{X = x, Y = y\}$.

$$P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x, y) \quad \text{פונקצית ההסתברות של } X$$

$$P_Y(y) = \sum_x P_{XY}(x, y) \quad \text{פונקצית ההסתברות של } Y$$

הערה: מהתפלגות משותפת ניתן תמיד למצוא את ההתפלגות השולית ע"י סכימה או אינטגרציה, אך מההתפלגות השולית בד"כ לא ניתן לדעת את ההתפלגות המשותפת.

שווי התפלגות: מ"מ X ו- Y שווי התפלגות אם לכל a ממשי: $P_X(a) = P_Y(a)$.

שוויון: מ"מ X ו- Y שווים אם $\sum_a P_{XY}(a, a) = 1 \Rightarrow P(X = Y) = 1$.

פונקצית הסתברות מותנית:

$$P_{Y|X}(y | x) = P(Y = y | X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}, \quad P(X = x) > 0$$

$$P_{XY}(x, y) = P(Y = y | X = x) \cdot P(X = x) \quad \text{כלל הכפל:}$$

$$P_X(x) = \sum_y P_{X|Y}(x | y) \cdot P_Y(y) \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה:}$$

$$P_{Y|X}(y | x) = \frac{P_{X|Y}(x | y) \cdot P_Y(y)}{P_X(x)} \quad \text{נוסחת בייס:}$$

נוסחת החלפת משתנים: יהי $Z = f(X, Y)$ אז Z מ"מ ומתקיים:

$$P_Z(z) = P(Z = z) = \sum_{(x,y): f(x,y)=z} P(X = x, Y = y)$$

תלות: מ"מ בדידים X ו- Y הם בלתי תלויים אם: $\forall x, y : P_{XY}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

- ההתפלגות המותנת של Y בהינתן $X = x$ אינה תלויה ב- x .
- ההתפלגות המותנת של X בהינתן $Y = y$ אינה תלויה ב- y .

ווקטורים מקריים (מספר רב של משתנים מקריים):

הגדרה: יהיו (X_1, \dots, X_n) משתנים מקריים בדידים. פונקציית ההסתברות המשותפת:

$$P_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

שולית 1-מימדית: $P_{x_j}(x_j) = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1}} \dots \sum_{x_n} P_{x_1 \dots x_n}(x_1, \dots, x_n)$

שולית k-מימדית: $P_{x_1 x_2 \dots x_k}(x_1 \dots x_k) = \sum_{x_{k+1}} \dots \sum_{x_n} P_{x_1 \dots x_n}(x_1, \dots, x_n)$

הערה: k המשתנים לא חייבים להיות בסדר עוקב כמו בנוסחה.

אי תלות: n מ"מ הם ב"ת אם"ם: $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$

הערה: עבור n מ"מ בלתי תלויים, אם נחלקם לקבוצות זרות ונפעיל על כל קבוצה בנפרד פונקציה

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(X_1, \dots, X_{n_1}) \\ y_2 &= f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(X_{n_{m-1}+1}, \dots, X_n) \end{aligned}$$

אחרת שתיתן ערך מסוים: אז (y_1, \dots, y_m) הם ב"ת.

התפלגות מולטינומית: מבצעים סדרה של n ניסויים ב"ת, בכל ניסוי k תוצאות אפשריות עם

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1, p_1, \dots, p_k$$

הסתברויות:

נסמן ב- X_1 - מספר הפעמים שהתקבלה תוצאה מסוג-1

⋮

X_k - מספר הפעמים שהתקבלה תוצאה מסוג- k

פונקציית ההתפלגות המשותפת: $X \square Multi(n, p_1, p_2, \dots, p_k)$

$$P_{X_1 X_2 \dots X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}, & \sum_{i=1}^k x_i = n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

סטטיסטי הסדר:

הגדרה: נתונים - X_1, \dots, X_n . סטטיסטי הסדר שלהם: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

(כלומר: משתנים המקבלים את הראשון בגודל, השני בגודל וכן הלאה...)

הערות:

- אם הנתונים הם אקראיים אז $X_{(1)} \dots X_{(n)}$ הם n מ"מ.
- אפילו אם X_1, \dots, X_n הם ב"ת, סטטיסטי הסדר $X_{(1)} \dots X_{(n)}$ הם תלויים.

תוחלת ואינדיקטורים

תוחלת:

הגדרה: תוחלת של מ"מ בדיד X :
$$E(X) = \sum_{x \in R_X} xP(X = x)$$

הערות:

- אם הטווח של X סופי אז הסכום של הטור תמיד מוגדר. אחרת הוא יהיה מוגדר רק אם הטור מתכנס בהחלט: $\sum_x |x| P(X = x) < \infty$.

- ניתן להכליל ולדבר על תוחלת $\pm\infty$ אם הטור מתבדר ו- X מקבל ערכים בסימן קבוע.

תכונות:

1. **כלל הסכום:** לכל X, Y מ"מ $E(X + Y) = EX + EY$

2. אם מ"מ X מקבל ערכים בין a ל- b אז $a \leq EX \leq b$

3. **לינאריות:** תוחלת היא אופרטור ליניארי: $E(aX + b) = aE(X) + b$

חוק המספרים הגדולים: עבור X_i ב"ת ו- $M = EX_i$ אז $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow M$

נוסחת הזנב: עבור מ"מ המקבל ערכים שלמים אי שליליים $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x)$

* מומלץ להשתמש בה כאשר הביטוי $P(X \geq x)$ קל יותר לחישוב מאשר $P(X = x)$.

כלל הכפל: עבור X, Y מ"מ **בלתי תלויים** $E(XY) = EX \cdot EY$ - ההפך אינו נכון.

זוג מ"מ שמקיימים $EXY = EX \cdot EY$ נקראים **בלתי מתואמים** (אך לא ב"ת!).

עבור כל X, Y מ"מ:
$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(X = x, Y = y)$$

משפט:

1. בלתי תלויים \leftarrow בלתי מתואמים.

2. בלתי מתואמים $\not\leftarrow$ בלתי תלויים.

3. ב"ת $\leftrightarrow E(h(X)) \cdot E(g(Y)) = E(h(X) \cdot g(Y))$ לכל h, g רציפות וחסומות.

אינדיקטורים:

הגדרה: I_A אינדיקטור של מאורע A הוא מ"מ המוגדר ע"י: $I_A = \begin{cases} 1 & A \text{ happened} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

תוחלת של אינדיקטור: $E(I_A) = P(A)$

אם יש אוסף מאורעות $A_i, 1 \leq i \leq n$, כאשר X סופר כמה מתוכם קרו $X = \sum I_{A_i}$ אז:

$E(X) = E(\sum I_{A_i}) = \sum E(I_{A_i}) = \sum P(A_i)$

תוחלת ידועה של התפלגויות:

בינומי: $X \sim Bin(n, p)$ $E(X) = np$

בינומי שלילי: $X \sim NB(m, p)$ $E(X) = \frac{m}{p}$

גיאומטרי: $X \sim Geo(p)$ $E(X) = \frac{1}{p}$

פואסוני: $X \sim Pois(\lambda)$ $E(X) = \lambda$

אי-שוויונים ידועים:

חציון: מספר m המקיים: $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}, P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$.

שכיח: המספר שההסתברות לקבל אותו היא הגדולה ביותר.

הערה: תוחלת, חציון ושכיח יכולים להיות שונים.

אי-שוויון מרקוב: יהיה X מ"מ שמקבל ערכים לא שליליים, אזי לכל $a > 0$ $P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$

אי-שוויון בול (מקרה פרטי של מרקוב): $P(X \geq 1) \leq EX$

מומנט: התוחלת נקראת גם המומנט הראשון של X . המומנט ה- n הוא: $m_n = E(X^n)$

דוגמא: $X \sim Uni[1, \dots, n]$ מ"מ בדיד. אז: $P(X = x) = \frac{1}{n}, x = 1, 2, \dots, n$

$$m_1 = EX = \sum \frac{1}{n} x = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$m_2 = EX^2 = \sum \frac{1}{n} x^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

אי-שוויון ינסן: אם f פונקציה קמורה אזי: $E(f(x)) \geq f(E(x))$

תוחלת של פונקציה של מ"מ:

במידה ו- $g(X)$ היא פונקציה ניתן לחשב את התוחלת שלה ללא שימוש בהגדרה באופן הבא:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x)P(X = x)$$

ולמספר מ"מ: $Eg(X, Y) = \sum_x \sum_y g(x, y)P(X = x, Y = y)$

חיזוי:

מחפשים ערך b כך ש- $E(X - b)^2$ יהיה מינימאלי. אז $b = EX$

מחפשים ערך b כך ש- $E|X - b|$ יהיה מינימאלי. אז **החציון** הוא החזאי במקרה זה.

שונות וסטיית תקן

הגדרה: $Var(X) = \min E(X - a)^2$ כלומר אם $EX^2 < \infty$ אז: $Var(X) = E(X - EX)^2$

הנוסחה השימושית לחישוב: $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$

סטיית תקן: $\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(x)}$

אלה המדדים המתארים עד כמה ההתפלגות מפוזרת סביב התוחלת. ככל שההתפלגות מרוכזת יותר סביב התוחלת כך קטנה השונות/סטיית התקן. השונות נמדדת ביחידות בריבוע של מ"מ וסטיית התקן באותן היחידות כמו מ"מ.

תכונות של שונות:

- $\forall X, Var(X) \geq 0$

- $Var(X) = 0$ אם"מ X הוא מ"מ קבוע.

- יהי X מ"מ המקיים: $Var(X)$ סופי, אזי לכל a, b $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

נשים-לב כי תכונה זו גוררת כי מתקיים גם $SD(aX + b) = |a| SD(X)$. הכוונה בתוכנה היא כי הזזה של משתנה מקרי (b) אינה משנה שונות אך הכפלה בקבוע (a) כן משנה שונות.

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

- עבור X_1, \dots, X_n בלתי תלויים: $Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i)$

שונות של התפלגויות ידועות:

$Var(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$ - $X \square Uni[1, N]$

- $X \square Ber(p)$

$Var(X) = p - p^2 = p \cdot q$

$Var(X) = \lambda$ - $X \square Pois(\lambda)$

$Var(X) = n \cdot pq$ - $X \square Bin(n, p)$

- $X \square HG(N, D, n)$

$Var(X) = \frac{N - n}{N - 1} npq$

$Var(X) = \frac{q}{p^2}$ - $X \square Geo(p)$

$Var(X) = \frac{m(1 - p)}{p^2}$ - $X \square NB(m, p)$

$$P(|X - E(X)| \geq SD(X) \cdot k) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{אי-שוויון צ'ב'ב: לכל מ"מ } X \text{ ולכל } k > 0 \text{ מתקיים:}$$

משמעות: ההסתברות ש- X חורג מהתוחלת שלו ביותר מ- k פעמים סטיית התקן, קטנה או שווה ל-

$$\frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \quad \text{צורה אחרת לרישום:}$$

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ ב"ת (בלתי מתואמים גם תנאי

מספיק), שווי-התפלגות עם תוחלת μ ושונות- σ^2 . יהי $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ממוצע המשתנים האלו. אז

$$P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{לכל } \varepsilon > 0 \text{ מתקיים:}$$

משמעות: ככל שהמדגם גדל, הממוצע מתקרב לתוחלת כרצוננו, בהסתברות שואפת ל-1

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu)$$

החוק החזק של המספרים הגדולים: עבור תנאי המשפט הקודם, מתקיים:

$$P\left(\lim_{x \rightarrow \infty} |X_n - \mu| = 0\right) = 1$$

משמעות: כאשר הממוצע מתכנס לתוחלת, אז ההסתברות שמאורע יקרה היא: 1.

קווריאנס (שונות משותפת) ומקדם מתאם

הגדרות שונות משותפת:

$$\boxed{Cov(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = EXY - EXEY} \quad \text{קווריאנס:}$$

$$\boxed{Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)} \quad \text{נוסחה נוספת:}$$

הערות:

- שונות משותפת מצביעה על תיאום בין המשתנים המקריים: $X, Y \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0$
בלתי מתואמים (חסרי קורלציה)
- בלתי תלויים \Leftrightarrow בלתי מתואמים (ההפך לא נכון).

תכונות של שונות משותפת:

- $Cov(X, X) = Var(X)$
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(X, a) = 0$, לכל a קבוע.
- $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$
- $Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$

מקדם המתאם:

מקדם המתאם בין X ל- Y :

$$\boxed{Corr(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{SD(X) \cdot SD(Y)} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

תקנון: הורדת תוחלת וחלוקתה בסטיית תקן- $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma_x}$ כאשר: $E(X^*) = E(Y^*) = 1$ ולכן:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{SD(X) \cdot SD(Y)} = \frac{E(X - \mu_x)(Y - \mu_y)}{SD(X) \cdot SD(Y)} = \boxed{E(X^* Y^*)}$$

תכונות של מקדם המתאם:

- $Corr(X, X) = 1$ $-1 \leq Corr(X, Y) \leq 1$
- $Corr(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b, a > 0$ $Corr(X, Y) = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0$
- $Corr(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y = aX + b, a < 0$ $Corr(aX + b, cY + d) = sign(ac) \cdot Corr(X, Y)$

הערה: אם מקדם המתאם הוא-1 בערכו המוחלט, קיים קשר לינארי בין המשתנים.

אופי התלות בין מאורעות:

תלות חיובית: מאורעות A ו- B תלויים חיובית אם $\left\{ \begin{array}{l} P(A|B) > P(A) \\ P(B|A) > P(B) \end{array} \right.$ (הידיעה ש- A קרה,

מגדילה את הסיכוי ש- B יקרה ולהפך).

תלות שלילית: מאורעות A ו- B תלויים חיובית אם $\left\{ \begin{array}{l} P(A|B) < P(A) \\ P(B|A) < P(B) \end{array} \right.$ (הידיעה ש- A קרה,

מקטינה את הסיכוי ש- B יקרה ולהפך).

שימוש באינדיקטורים:

$$\underline{\text{תלויים חיובית}} \quad B \text{ ו-} A \Leftrightarrow P(A \cap B) > P(A)P(B) \Leftrightarrow \text{Cov}(I_A, I_B) > 0$$

$$\underline{\text{בלתי תלויים}} \quad B \text{ ו-} A \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \text{Cov}(I_A, I_B) = 0$$

$$\underline{\text{תלויים שלילית}} \quad B \text{ ו-} A \Leftrightarrow P(A \cap B) < P(A)P(B) \Leftrightarrow \text{Cov}(I_A, I_B) < 0$$

תוחלת מותנית

הגדרה: התוחלת המותנית של מ"מ Y בהינתן שקרה מאורע A מוגדרת ע"י:

$$E(X | Y = y) = \sum_x x \cdot P(X = x | Y = y) = \sum_x x P_{X|Y}(x | y)$$

הערה: התוחלת המותנית, תלויה ב- y ולכן הינה **פונקציה של y** : $E(X | Y = y) = g(y)$.

תכונות (כמו במקרה הלא מותנה):

$$E(X + Y | Z = z) = E(X | Z = z) + E(Y | Z = z) \quad -$$

$$E(aX + b | Z = z) = aE(X | Z = z) + b \quad -$$

תוחלת מותנית כמשתנה מקרי:

הגדרה: נרכיב את פונקציית התוחלת המותנית על Y ונקבל משתנה מ"מ- $E(X | Y) = g(Y)$

משפט ההחלקה: $E(X) = E(E(X | Y))$ וזה מתקיים לכל $h(X)$, פונקציה של מ"מ X .

$$E(X) = E(E(X | Y)) = \sum_y E(X | Y = y) \cdot P(Y = y) \quad \text{במקרה הברידי:}$$

נוסחאות נוספות:

$$E(X + Y | Y = y) = E(X | Y = y) + y$$

$$E(X + Y | Y) = E(X | Y) + Y$$

$$E(XY | Y) = Y \cdot E(X | Y)$$

$$E(XY | Y = y) = y \cdot E(X | Y = y)$$

משפט WALD: X_1, X_2, X_3, \dots ב"ת, כולם בעלי תוחלת $\mu = E(X_j)$. N מ"מ אחר, ב"ת בכל

$$E(S_N) = E(X) \cdot E(N) = \mu E(N) \quad \text{ה-} X_j \text{ ימים. } S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N \text{ אז מתקיים:}$$

הערה: ה- X_j ימים עצמם יכולים להיות תלויים או ב"ת בינם לבין עצמם.

דוגמא: לאדם יהיו N ילדים. לילד מספר k יהיו X_k ילדים משלו, כאשר X_k ימים הם ב"ת ב- N . ו-

$$E(X_k) = \mu \quad \text{לכל } k. \text{ אז מספר הנכדים של אותו אדם } S_N, \text{ התוחלת שלו: } E(S_N) = \mu E(N)$$

שונות מותנית:

$$\sigma_Y^2 = E(\sigma_{Y|X}^2) + \text{Var}(E(Y | X)) \quad \text{הגדרה: } X, Y \text{ מ"מ אז:}$$

פונקציות יוצרות

מומנטים ופונקציות יוצרות מומנטים:

מומנט: יהי X מ"מ. המומנט ה- n של X הוא: $E(X^n)$.

$$\boxed{E(X^n) = \sum_{x \in R} x^n \cdot P(X = x)}$$
 עבור X בדיד:

פונקציה יוצרת מומנטים: (פי"מ) מסומנת ב- $M_X(t) = E(e^{tX})$

$$\boxed{M_X(t) = \sum_{x \in R} e^{tx} \cdot P(X = x)}$$
 עבור X בדיד:

הערה: ניתן לקבל מהפונקציה את כל המומנטים של X ע"י חישוב נגזרותיה ומציאת הערך של

$$\frac{\partial^n M}{\partial t^n}(t=0) = E(X^n) \quad \text{כלומר: } t=0$$

עבור כמה מ"מ: פונקציה של סכום משתנים מ"מ ב"ת שווה למכפלת הפונקציות יוצרות המומנטים שלהם:

$$\boxed{M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)}$$
 (זה נכון גם למספר רב יותר של מ"מ).

$$\boxed{M_{aX+b}(t) = e^{bt} M(at)}$$
 תכונה: יהי X מ"מ, a, b קבועים, אזי:

משפט: פונקציה יוצרת מומנטים (אם קיימת) מגדירה את התפלגותו של מ"מ באופן חד-משמעי. אבל כל המומנטים ללא הפונקציה לא יכולים לקבוע באופן ח"ע את ההתפלגות).

דוגמאות:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = e^t p + e^0 (1-p) = \boxed{pe^t + q} \quad : X \square Ber(p) \quad -$$

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^n e^{tk} \binom{n}{k} (pe^t)^k q^{n-k} = \boxed{(pe^t + q)^n} \quad : X \square Bin(n, p) \quad -$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^n}{n!} \quad : X \square Pois(\lambda) \quad -$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = \boxed{e^{\lambda(e^t - 1)}}$$

$$M_{X+Y}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \cdot e^{\mu(e^t - 1)} = e^{(\lambda + \mu)(e^t - 1)} \quad \text{סכום מ"מ פואסונים:} \quad -$$

פונקציה יוצרת הסתברות:

הגדרה: יהי X מ"מ המקבל ערכים שלמים ואי-שליליים. $g_X(s) = E(s^X) = \sum_{x \in R_X} s^x P(X = x)$

תכונות:

- $\frac{\partial^k g_X}{\partial s^k}(s=0) = k! P(X = k)$ (בפרט אם מציגים את g_X כטור חזקות סביב $s = 0$ אז

המקדם של s^k הוא ההסתברות ש- X יקבל את הערך- k).

$g_X(1) = 1$

- $\frac{\partial g_X}{\partial s}(s=1) = E(X)$

$\frac{\partial^2 g_X}{\partial s^2}(s=1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$

- $g^{(n)}(0) = n! \cdot P(n)$.

- יהיו X_1, \dots, X_n מ"מ ב"ת, אזי: $g_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n g_{X_i}(t)$

משפט: פונקציה יוצרת הסתברות של מ"מ (אם קיימת) מגדירה באופן חח"ע את פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי.

פונקציה אופיינית:

הגדרה: $\phi_X(\theta) = E(e^{i\theta X}) = \sum e^{i\theta x} p(x)$

תהליכי הסתעפות

במצב ההתחלתי יש צומת יחיד בעץ, $i = 0$. בשלב ה- i לכל צומת v ברמה ה- $i-1$ מתווספים C_v בנים, כאשר C_v הוא משתנה מקרי.

הנחה: כל ה- C_v הם בלתי תלויים ושווי-התפלגות.

סימונים:

g - פונקציית יוצרת הסתברות של המשתנה המקרי C_v .

μ - התוחלת של המשתנה המקרי C_v

Z_i - משתנה מקרי שערכו שווה למספר הצמתים הכולל ברמה ה- i בעץ, $Z_0 = 1$.

g_i - פונקציית יוצרת הסתברות של המשתנה המקרי Z_i

משפטים:

$$1. \text{ עבור } i = 1, 2, \dots \quad g_0(s) = s, \quad g_i(s) = g_{i-1}(g(s)) = g(g(\dots(s)\dots))$$

$$2. \text{ עבור } i = 0, 1, 2, \dots \quad E(Z_i) = \mu^i$$

התפלגויות רציפות וצפיפות

מ"מ רציף: מ"מ המגודר על מרחב מדגם Ω ייקרא רציף אם קיימת פונקציה $f_x(x)$ כך ש:

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(x) dx$$

$f_x(x)$ נקראת **פונקצית הצפיפות** של מ"מ X .

תכונות:

- כאשר dx קטן מאוד אז מתקיים: $P(X \in [x, x + dx]) = f_x(x) \cdot dx$

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_x(x) dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

אילוצים:

$$\forall x, f_x \geq 0$$

$$P(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

הערות:

- $f_x(x) > 1$ לא מציינת הסתברות ולכן ייתכן כי $f_x(x) > 1$.

- "שטח נקודה אפס": $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ $\Rightarrow P(X = x) = \int_x^x f_x(t) dt = 0$.

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx \quad \text{תוחלת של מ"מ רציף:}$$

הערה: התוחלת קיימת רק כאשר $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_x(x) dx < \infty$ (התכנסות במידה שווה).

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_x(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2 \quad \text{שונות של מ"מ רציף:}$$

התפלגות אחידה (יוניפורמית):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad X \sim \text{Uni}(a, b) \quad . a < b$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

התפלגות נורמלית:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad -\infty < z < \infty \quad Z \sim N(0, 1) \quad \text{נורמאלי סטנדרטי:}$$

ומתקיים: $P(Z \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$, כאשר לאינטגרל הזה אין פיתרון אנליטי ומסמנים:
 $P(Z \leq a) = \Phi(a)$, את הערכים מוצאים בטבלה.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \mu \in R, \sigma > 0 \quad \text{נורמאלי כללי:}$$

ניתן לנרמל את X כדי להיות נורמאלי סטנדרטי:

$$P(X \leq b) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

סכום של משתנים נורמאליים: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ אז:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

משפט הגבול המרכזי

יהיו X_1, X_2, \dots, X_n מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת μ ושונת σ^2 . נגדיר: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ אזי:

כלומר $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$ בקירוב מתפלג כמו משתנה מקרי מהתפלגות נורמאלית-

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) = P(N(0,1) \leq a) \text{ כלומר: } N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

באופן שקול אם נגדיר: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ אזי: $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$

S_n מתפלג בקירוב כמו מ"מ: $N(n\mu, n\sigma^2)$.

התפלגות אקספוננציאלית והתפלגות גאמא:

התפלגות מעריכית:

סימון: $X \sim \exp(\lambda)$. פונקצית צפיפות: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

תוחלת: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ שונות: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

חישוב הסתברות: $P(X > a) = \int_a^\infty f_X(x) dx = \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a}$

תכונת חוסר הזיכרון: אם נתון כי עד רגע t (כולל) לא היה מופע, אז "מתחילים מהתחלה", ולכן הזמן עד המופע הבא הוא: $P(X > t + s | X > t) = P(X > s) = e^{-\lambda s}$. $\exp(\lambda)$

משפט: ההתפלגות הרציפה היחידה בעלת תכונת חוסר זיכרון היא ההתפלגות האקספוננציאלית.

התפלגות Gamma:

סימון: $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$

פונקצית צפיפות: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

כאשר n, λ וכאשר $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^{n-1} dy$, שזוהי פונקצית גמא.

תכונות:

- עבור n שלם מתקיים: $\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$

- $\Gamma(n) = (n-1)!$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

תוחלת: $E(X) = \frac{n}{\lambda}$ שונות: $Var(X) = \frac{n}{\lambda^2}$

הערה: התפלגות אקספוננציאלית הינה מקרה פרטי של התפלגות $Gamma$:

$$Gamma(1, \lambda) = \exp(-\lambda)$$

גאמא- סכום מ"מ אקספוננציאליים: יהיו X_1, \dots, X_n מ"מ ב"ת, $X_i \sim \exp(\lambda)$. נגדיר:

$$Y = X_1 + \dots + X_n \quad Y \sim Gamma(n, \lambda)$$

הקשר בין מ"מ אקספוננציאלי גאמא ופואסון:

N_t - מספר המופעים בקטע $[0, t]$.

T_i - זמן המופע ה- i $(T_i - T_{i-1})$ - זמן בין מופעים.

• אם $N_t \sim Pois(\lambda t)$ אז:

○ $(T_i - T_{i-1}) \sim \exp(\lambda)$

○ $T_i \sim Gamma(i, \lambda)$

• אם $(T_i - T_{i-1}) \sim \exp(\lambda)$ וב"ת אזי:

○ $N_t \sim Pois(\lambda t)$

$$P(T_i > t) = P(N_t \leq i-1) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \quad \text{נוסחה לחישוב הסתברויות עבור } Gamma(i, \lambda)$$

משמעות: ההסתברות שהמאורע ה- i יקרה אחרי זמן- t שווה להסתברות לכך שעד לזמן- t קרו לכל היותר $i-1$ מאורעות.

פונקצית התפלגות מצטברת

הגדרה: יהי X מ"מ. פונקצית התפלגות מצטברת של X היא פונקציה $F_X : R \rightarrow [0,1]$ המוגדרת ע"י: $F_X(x) = P(X \leq x)$.

עבור X בדיד: $F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} P_X(x)$

עבור X רציף: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \Rightarrow f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$

כלומר: ע"י גזירה של פונקצית התפלגות מצטברת, ניתן לקבל את הצפיפות של מ"מ רציף.

תכונות:

- $F(\infty) = 1$

- $F(-\infty) = 0$

- $F(x) \leq F(y) \Rightarrow x < y$, F מונוטונית.

הערות:

- פונקצית ההתפלגות המצטברת מגדירה את ההתפלגות של מ"מ. כלומר, אם למשתנים מקריים אותה פונקצית התפלגות מצטברת, אז להם אותה צפיפות ואתה התפלגות על- R .

- עבור X רציף: $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

נוסחת הזנב: X מ"מ בדיד, שמקבל ערכים שלמים לא שליליים. $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$

במקרה רציף זה יכול להיות אי-שיוויון ממש ואז מקבלים: $E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx$

טרנספורמציות של מ"מ רציפים

שינוי משתנה:

שינוי ליניארי: X מ"מ רציף בעל פונקציית צפיפות $f_X(x)$, פונקציית הצפיפות של $Y = a + bX$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \quad (b \neq 0) \text{ ניתנת ע"י:}$$

הרכבה: X מ"מ רציף בעל פונקציית צפיפות $f_X(x)$. g מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש (ואז

$$f_Y(y) = \left| (g^{-1}(y))' \right| \cdot f_X(g^{-1}(y)) \quad : Y = g(x) \text{ פונקציית הצפיפות מסוים). היא הפיכה בתחום מסוים).}$$

סימולציה:

נתון משתנה אחיד: $U \square uni[0,1]$.

המטרה: ע"י שימוש ב- U ועל-סמך טרנספורמציה, לקבל תצפית מהתפלגות של מ"מ X , כאשר F פונקציית ההתפלגות המצטברת של- X , נתונה.

נרצה למצוא פונקציה g כך ש- $P(g(U) \leq x) = F(x)$. בדרך זו $g(U)$ ו- X יהיו שווי התפלגות. בנוסף מתקיים ש- $Uni(0,1) \square F(X)$. לכן נגדיר $U = F(X)$ ונחלץ את X .

$$(g(U) = F^{-1}(U))$$

על-מנת להגריל מ"מ X , נגריל עתה מ"מ $Uni(0,1)$ ונציב בפונקציה ההופכית שמצאנו.

התפלגות חי בריבוע:

יהיו X_1, X_2, \dots, X_n מ"מ, ב"ת, כאשר $X_i \square N(0,1)$. נגדיר: $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

אז: $Y \square \chi^2(n) \equiv Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ כלומר: Y מפולג חי בריבוע עם n דרגות חופש.

$$f_X(x, n) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot x^{(n/2)-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

הערה: כאשר $X_1, X_2 \square N(0,1)$, $(X_1^2 + X_2^2) \square \chi^2(2) \equiv Gamma\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\right)$.

דוגמא: $Y = X^2$, $X \square N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}$. אז: $f_Y(y) = \frac{y^{-1/2} e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}$ ו- $Y \square \chi^2(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

התפלגויות וצפיפויות משותפות

התפלגות משותפת רציפה של זוג מ"מ:

ל-מ"מ X, Y המוגדרים על אותו מרחב המדגם יש התפלגות משותפת רציפה אם לכל $B \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\text{מתקיים: } P((X, Y) \in B) = \int_B f_{X,Y}(t, s) dt ds$$

צפיפות משותפת: היא פונקציה הצפיפות המשותפת של X ו- Y המקיימת:

$$f_{X,Y}(t, s) \geq 0 \text{ לכל } t, s$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, s) dt ds = 1$$

$$P(x \leq X \leq x + dx, y \leq Y \leq y + dy) = f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

(מבחינה גיאומטרית, ההסתברות במקרה הדו-מימדי מתוארת ע"י השטח במלבן $dx \times dy$.)

שיטות למציאת צפיפות משותפת:

$$1. \text{ ע"י: } f_{X,Y}(x, y) dx dy = P(x \leq X \leq x + dx, y \leq Y \leq y + dy)$$

2. מציאת $F_{X,Y}(x, y)$ וגזירתה.

התפלגות מצטברת משותפת: עבור (X, Y) זוג מ"מ המוגדרים על אותו מרחב המדגם,

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv$$

$$\text{ומתקיים: } f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (F_{X,Y}(x, y))$$

פונקציות צפיפות שוליות:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

הערה: בכל-פעם עושים אינטגרציה על המשתנה שרוצים להשמיט, נכון גם ליותר מ-2 משתנים.

אי-תלות בין מ"מ רציפים:

X, Y יקראו מ"מ בלתי תלויים אם מתקיים: $f_{x,y}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$ לכל $x, y \in R$.

X, Y יקראו מ"מ בלתי תלויים אם מתקיים: $F_{x,y}(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$ לכל $x, y \in R$.

הערה: אם ניתן להפריד את $f_{x,y}(x, y)$ למכפלת שתי פונקציות באופן הבא:

$f_{x,y}(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ ותחומיהם השוליים של X ו- Y אינם תלויים אחד בשני, כלומר-

התחום המשותף של (X, Y) הינו מלבן המקביל לצירים, אזי המתנים המקריים הם ב"ת ו- $g(x)$ ו-

$h(y)$ הן פונקציות הצפיפות של X, Y עד כדי קבוע.

כתיבה דרך הסתברות: $P(X \in dx, Y \in dy) = P(X \in dx) \cdot P(Y \in dy)$

התפלגות אחידה דו-מימדית:

עבור $B \subseteq R^2$, נאמר ש- (X, Y) מפולגים אחיד על B , $(X, Y) \square Uni(B)$ אם:

$$f_{x,y}(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{area B} & (t, s) \in B \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

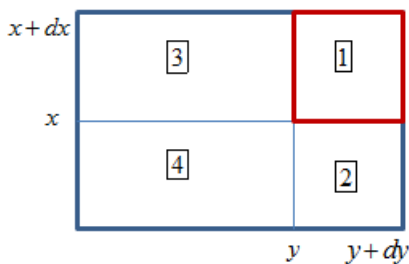
כאשר (X, Y) נבחרה באקראי על B .

הערות:

- עבור $A \subseteq B$ מתקיים: $P((X, Y) \in A) = \frac{area A}{area B}$

- אם $X \square Uni[a, b]$ ו- $Y \square Uni[c, d]$, אז הם מתפלגים במשותף אחיד דו-מימדי על המלבן: $[a, b] \times [c, d]$.

תכונה:



$$P\left\{ (X, Y) \in \underbrace{[x, x+dx] \times [y, y+dy]}_{\text{1}} \right\} = F\left(\underbrace{x+dx}_{\text{1+2+3+4}}, \underbrace{y+dy}_{\text{1+2+3+4}} \right) - F\left(\underbrace{x+dx}_{\text{2+4}}, y \right) - F\left(x, \underbrace{y+dy}_{\text{3+4}} \right) + F(x, y)$$

סטטיסטי הסדר במקרה הרציף

הגדרה: X_1, X_2, \dots, X_n ב"ת, ש"ה, $X_i \square f_x$. $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$.
 $\min_{1 \leq i \leq n} X_i$ $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$

מינימום, מקסימום והמקרה הכללי:

$$F_{(1)} = P(\min X_i < x) = 1 - P(\min X_i > x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

$$f_{(1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{(1)} = n f(x) \cdot (1 - F(x))^{n-1}$$

$$F_{(n)} = P(\max X_i < x) = (F(x))^n$$

$$f_{(n)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{(n)} = n f(x) (F(x))^{n-1}$$

$$f_{(k)}(x) = n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-k}$$

דוגמא: $X_i \square Uni[0,1]$, $f_x(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. אז: $f_{(k)}(x) = n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$

פונקצית צפיפות משותפת של $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$: $f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! & 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

התפלגות בטא:

$$B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x^{r-1} (1-x)^{s-1}}{B(r, s)} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר:

דוגמא: סטטיסטי הסדר מתפלג: $\beta(k+1, n-k+1)$

צפיפות מותנית ותוחלת מותנית

צפיפות מותנית:

הגדרה: $f_Y(y) > 0$ כך ש- y המוגדרת עבור כל $Y = y$ בהינתן X הצפיפות המותנית של:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

כללי הסתברות במקרה הרציף:

- כלל הכפל: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x)$

- פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנית: $F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(t|y) dt$

- חישוב הסתברות מותנית: $P(a \leq X \leq b | Y = y) = \int_a^b f_{X|Y}(x|y) dx$

- צפיפות שולית דרך צפיפות מותנית: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) dy$

- נוסחת בייס לצפיפות: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx}$

- נוסחת בייס למאורע: $f_X(x|A) = \frac{P(A|X=x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(A|x) f_X(x) dx}$

תוחלת מותנית:

הגדרה: $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$

הערה: אם נסמן $h(y) = E(X|Y=y)$ אז: $h(Y) = E(X|Y)$ הוא מ"מ.

משפט ההחלקה במקרה הרציף: $E(X) = E(E(X|Y)) = E(h(Y))$

נוסחה לחישוב שונות: $Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$

טרנספורמציות

טרנספורמציות חח"ע של מ"מ רציף:

הגדרה: יהיה X מ"מ רציף המקבל ערכים בקטע $[a, b]$. תהיה $g : R \rightarrow R$ פונקציה גזירה ועולה (יורדת) ב- $[a, b]$. אזי למ"מ Y המוגדר להיות $Y = g(X)$ יש את פ' הצפיפות הבאה:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} \right| & g(a) \leq y \leq g(b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

טרנספורמציה דו-ממדית:

הגדרה: יהי (X, Y) מ"מ דו-ממדי רציף בעל צפיפות משותפת: $f_{X,Y}(x, y)$. תהיינה $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$ פונקציות ממשיות על המישור, שהן חח"ע וגזירות, כך שקיימות הפונקציות ההפוכות: $x = h_1(u, v)$, $y = h_2(u, v)$ והן גזירות. אז נגדיר את היעקוביאן:

$$U = g_1(X, Y), V = g_2(X, Y) \text{ אז פונקציות הצפיפות המשותפת של } J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot |J(u, v)|} \text{ :תנוה ע"י:}$$

הערה: עבור מ"מ $U = g_1(X, Y)$ ניתן לכתוב מ"מ נוסף $V = X$ או $V = Y$, לבצע טרנספורמציה דו-ממדית עבור U, V ולמצוא צפיפות שולית של U ע"י אינטגרציה.

מקרה פרטי: מעבר מקואורדינאטות קרטזיות לפולאריות: נניח שלמ"מ (X, Y) יש צפיפות

$f_{X,Y}(x, y)$, אזי לקואורדינאטות הפולאריות יש צפיפות משותפת:

$$\boxed{f_{R,\theta}(r, t) = r f_{X,Y}(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)}$$

טרנספורמציות רב-ממדיות:

הגדרה:

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \text{ וגם: } \hat{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \square f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= h_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ X_2 &= h_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &\vdots \\ X_n &= h_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \end{aligned}$$

כל פונקציות g הן חח"ע ולכן הפיכות, ואז קיימות:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_n(y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

אז נגדיר את היעקוביאן:

ונקבל כי פונקציות הצפיפות המשותפת ל- $\hat{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ היא:

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(h_1(\hat{y}), h_2(\hat{y}), \dots, h_n(\hat{y})) \cdot |J(y_1, y_2, \dots, y_n)|$$

התפלגות שולית מהמשותפת:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{x_3}^{x_3} \dots \int_{x_n}^{x_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x) dx_3 \dots dx_n$$

טרנספורמציות ליניאריות:

נניח ש- A^{-1} קיימת. אז: $X = A^{-1}Y$.

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \hat{Y} = A\hat{X}$$

$$f_{\hat{Y}}(\hat{y}) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_{\hat{X}}(A^{-1}\hat{y})$$

סכום של משתנים מקריים

הגדרה: יהיו X, Y מ"מ ויהי $Z = X + Y$.

במקרה הבדיד: פונקציית ההתפלגות של Z -

$$P_Z(z) = \sum_x P_{X,Y}(x, z-x)$$

אם X, Y ב"ת:

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) P_Y(z-x)$$

במקרה הרציף: פונקציית הצפיפות של Z -

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)$$

אם X, Y ב"ת:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

הערה: כאשר X, Y ב"ת זה נקרא קונבולוציה.

התפלגות רב נורמאלית ודו נורמאלית

התפלגות רב-נורמאלית:

הגדרה: יהי \hat{X} וקטור אקראי ממימד k המפולג נורמאלית עם תוחלת $E\hat{X} = \hat{\mu}$ ומטריצת קווריאנס Σ , כלומר: $\hat{X} \sim N(\hat{\mu}, \Sigma)$. ניתן לכתוב את פונקציית הצפיפות של \hat{X} בצורה:

$$f_{\hat{X}}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Sigma|^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\hat{x} - \hat{\mu})' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\hat{x} - \hat{\mu})\right)$$

מטריצת קווריאנס: יהי \hat{X} וקטור אקראי. Σ נקראת מטריצת הקווריאנס של \hat{X} ומתקיים:

$$\Sigma = E\left((X - EX)(X - EX)'\right) = \begin{pmatrix} Cov(X_1, X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & \cdots & Cov(X_n, X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

על האלכסון הראשי מצויות השונות של איברי \hat{X} בהתאמה, מחוץ לאלכסון נמצאות השונות המשותפת (קווריאנס) של איברי \hat{X} , במיקומים המתאימים.

טרנספורמציה ליניארית של וקטור אקראי נורמאלי:

יהי וקטור אקראי $\hat{X} \sim N(\hat{\mu}, \Sigma)$. תהא מטריצה A (לאו דווקא ריבועית) ויהי וקטור b . אם

$$\hat{Y} = A\hat{X} + b, \text{ אזי } \hat{Y} \sim N(A\hat{\mu} + b, A\Sigma A')$$

מסקנות:

1. כל התפלגות שולית של וקטור אקראי נורמאלי היא נורמאלית. לדוגמא אם $(X_1, X_2, X_3)'$ מפולג

נורמאלית אז גם $(X_1, X_3)'$ מפולג נורמאלית. במקרה זה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. כל ק"ל של משתנים מקריים, שפילוגם המשותף נורמאלי, היא נורמאלית. לדוגמא:

$3X_1 - X_2 + 2X_3$ מפולג נורמאלית. במקרה זה $A = (3 \quad -1 \quad 2)$ ו- $b = 0$.

משפט: משתנים שפילוגם המשותף נורמאלי והם בלתי מתואמים, הינם גם בלתי תלויים.

הערות:

- הכיוון השני אינו נכון, ייתכנו מ"מ בעלי התפלגות שולית נורמאלית שהם בלתי מתואמים אך אינם מפולגים יחד נורמאלית.

- רק פילוג נורמאלי מקיים את המשפט בתנאי החשוב שההתפלגות המשותפת היא נורמאלית.

התפלגות דו-נורמאלית:

הגדרה: יהי $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ וקטור המתפלג נורמאלית עם תוחלת- $E\hat{X} = \hat{\mu}$ ומטריצת קווריאנס Σ ,

כלומר: $\hat{X} \square N(\hat{\mu}, \Sigma)$. אז ניתן לכתוב את פונקציית הצפיפות של \hat{X} בצורה:

$$f_{\hat{X}}(\hat{x}) = \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\hat{x} - \hat{\mu})' \Sigma^{-1}(\hat{x} - \hat{\mu})\right)$$

אם נסמן- $\rho = \text{Corr}(X_1, X_2)$, $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$, $E(X_i) = \mu_i$, אזי:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \cdot \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]\right\}$$

תכונות:

א. X_1, X_2 מפולגים נורמאלית באופן שולי $X_1 \square N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \square N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

ב. הכיוון השני לא בהכרח נכון, כלומר לא כל שני משתנים נורמאליים בעלי מקדם מתאם כלשהו ρ , יתפלגו במשותף דו-נורמאלית.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & x \cdot y > 0 \\ 0 & x \cdot y < 0 \end{cases} \quad \text{דוגמא:}$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{ההתפלגויות השוליות הן כן נורמאליות:}$$

ג. ההתפלגויות המותנות הן נורמאליות:

$$(X_2 | X_1 = x_1) \square N\left(\mu_2 + \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right)$$

$$(X_1 | X_2 = x_2) \square N\left(\mu_1 + \rho \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right)$$

ד. שני מ"מ ב"ת שפילוגם השולי נורמאלי, מפולגים יחד דו-נורמאלית עם מקדם מתאם אפס.

משפט: אם $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$ אזי $\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}, \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} \right) \sim N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$.

דוגמא: $X, Z \sim N(0, 1)$ ב"ת, $Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot Z$ אז $Y \sim N(0, \rho^2 + 1 - \rho^2) = N(0, 1)$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E\left(X\left(\rho X + \sqrt{1 - \rho^2}Z\right)\right) - 0 = \rho + \underbrace{\sqrt{1 - \rho^2}E(XZ)}_{E(X) \cdot E(Z) = 0} = \rho$$

$$E(Y | X) = \rho E(X | X) + \sqrt{1 - \rho^2} E(Z | X) = \rho X + 0$$

סימולציה של $N(\mu, \sigma^2)$ בהינתן $Uni[0, 1]$:

אם $X \sim N(0, 1)$ אז $Y = \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$

פיתרון-1: $\Phi(x) = P(N(0, 1) \leq x)$

פיתרון-2: $(X, Y) \sim N(0, I)$, $X = R \cos \theta$, $Y = R \sin \theta$, $\theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$$\text{ונקבל: } f_{R\theta}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{1}{2}r^2} & 0 < r, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{יעקוביאן} = r$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot r e^{-\frac{1}{2}r^2} = f_\theta(\theta) \cdot f_R(r) \Rightarrow \theta \sim Uni[0, 2\pi], \quad R \sim r e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

$$F_R(r) = \int_0^r r e^{-\frac{1}{2}r^2} = 1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}, \quad F^{-1}(v) = \sqrt{-2 \ln(1-v)}, \quad V \sim Uni[0, 1]$$

יצירת 2 מ"מ נורמאליים בהינתן מ"מ אוניפורמיים:

$$U \rightarrow 2\pi U = \theta \sim Uni[0, 2\pi]$$

$$V \rightarrow \sqrt{-2 \ln(1-V)} = R \sim f_R(r) \quad \text{יהיו } U, V \sim Uni[0, 1] \text{ ב"ת אז:}$$

המ"מ החדשים שיצרנו (θ, R) מקיימים: $(R \cos \theta, R \sin \theta) = (X, Y) \sim N(0, 1)$ וב"ת.