משוואות ומערכות הפרשים

מערכת דינמית: מערכת בעלת קלט ופלט המשתנים בזמן

משוואת הפרשים: משוואה המחשבת ערכים על סמך ערכים קודמים. מתארת את הפלט של מערכת דינמית על סמך הפלט של המערכת בתקופות קודמות, והקלט הנוכחי והקודם שלה.

סדר המשוואה: מספר תקופות אחורה מהן מושפעת המשוואה.

משוואת מצב: מערכת משוואות המשמשת לתיאור של מצב המערכת, כפונקציה של הקלט הנוכחי ומצב המערכת בתקופה הקודמת.

הערה: תמיד ניתן לתרגם משוואת מצב למשוואת הפרשים מסדר ראשון.

פיתרון משוואת הפרשים ע"י פיתרון הומוגני ופרטי:

הרעיון:

$$\boxed{y(k) = y_h(k) + y_p(k)}$$

כאשר: $y_h(k)$ - פתרון הומוגני של המשוואה.

$y_p(k)$ – פתרון פרטי של המשוואה.

מציאת פתרון הומוגני:

ידוע כי הפתרון הוא מהצורה $y_h(k) = A\cdot\lambda^k$.

נציב במשוואה ההומוגנית (משוואת ההפרשים הנתונה עם קלט 0), ונמצא את כל ערכי λ האפשריים (שורשי הפולינום האופייני).

- כאשר כל השורשים הם מריבוי 1, הפתרון ההומוגני יהיה מהצורה:

$$y_h(k) = \sum_{i=1}^{p} A_i\lambda_i^k$$

(p - דרגת משוואת ההפרשים, A_i - סקלרים)

$\{\lambda_i^k\}$ - תקרא מערכת יסודית של פתרונות למשוואה ההומוגנית.

- כאשר השורש ה- m הוא מריבוי r, בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים מריבוי 1) r הרכיבים הבאים:

$$A_m^i k^i \lambda_m^k \qquad 0 \le i \le r-1$$

(A_m^i - סקלרים, λ_m – השורש ה- m (שריבויו r))

- כאשר קיים צמד שורשים מרוכבים $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$\begin{cases} y^1(k) = \dfrac{(\lambda_i)^k + (\bar{\lambda}_i)^k}{2} = \Re(\lambda_i{}^k) \\ y^2(k) = \dfrac{(\lambda_i)^k - (\bar{\lambda}_i)^k}{2i} = \Im(\lambda_i{}^k) \end{cases}$$ ולכן

בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$y_h(k) = A_1 y^1(k) + A_2 y^2(k) + \ldots.$$

מציאת הפתרון הפרטי:

1. כאשר הקלט של משוואת ההפרשים הוא מהצורה הבאה:

$$u(k) = \Re(v(k)); \qquad v(k) = \nu^k(p_0 + k\cdot p_1 + \ldots + k^m p_m); \quad \nu = rcis(\phi)$$

$$u(k) = (p_0 + p_1 k + \ldots + p_m k^m)\cdot r^k \cdot \cos(k\cdot\phi) + (q_0 + q_1 k + \ldots + q_m k^m)\cdot r^k \cdot \sin(k\cdot\phi)$$

(כאשר הקלט אינו מהצורה הנ"ל, השיטה אינה מתאימה).

- נמצא את הפרמטרים $\nu = r\cdot(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ ו- m.
- נגדיר l להיות הריבוי של ν בפולינום האופייני ($l = 0$ כאשר ν אינו שורש של הפ"א).
- ננחש פתרון מהצורה הבאה:

$$y_p(k) = (s_l k^l + \ldots + s_{l+m}k^{l+m})\cdot r^k \cos(k\cdot\phi) + (t_l k^l + \ldots + t_{l+m}k^{l+m})\cdot r^k \sin(k\cdot\phi)$$

- נציב במשוואת ההפרשים המקורית את $y_p(k)$, ונמצא את ערכי המקדמים s_i, t_i $(l \le i \le l+m)$

מציאת הפתרון הכללי:

- נחבר את שני הפתרונות ע"י:

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

- נציב תנאי התחלה, ונמצא את מקדמי הפתרון ההומוגני.

מציאת מקדמים במשוואה:

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0$$

נתון פיתרון למשוואה: $y(k) = k^2 2^k$

דרך-פיתרון 1: הצבה של הפיתרון ובידוד מקדמים:

$$(k+3)^2 2^{k+3} + a_2(k+2)^2 2^{k+2} + a_1(k+1)^2 2^{k+1} + a_0 k^2 2^k = 0$$

דרך-פיתרון 2: יצירת פ"א:

הפיתרון מעיד על קיום שורש $\lambda = 2$ מריבוי 3 ולכן הפ"א הוא:

$$a_0 = -8, a_1 = 12, a_2 = -6 \Leftarrow (\lambda-2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$$

פיתרון משוואת הפרשים רגילה:

נתון: $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 6\cdot 2^k \qquad y(0)=0,\ y(1)=5$

מציאת פיתרון הומוגני: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$$\boxed{y_h(k) = c_1(1)^k + c_2(2)^k}$$

מציאת פיתרון פרטי: $u(k) = 6\cdot 2^k \Rightarrow v = r = 2, m = 0, l = 1$

ניחוש לפיתרון: $y_p^v(k) = (s_1 k)2^k$

הצבה: $(s_1(k+2))2^{k+2} - 3(s_1(k+1))2^{k+1} + 2(s_1 k)2^k = 6\cdot 2^k$

פיתרון פרטי: $8s_1 - 6s_1 = 6 \rightarrow s_1 = 3$ $\quad \boxed{y_p(k) = 3k\cdot 2^k}$

מציאת פיתרון כללי: $y(k) = c_1 + c_2 2^k + 3k2^k$

הצבת ת"ה: $\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + 2c_2 + 6 = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}, \boxed{c_2 = -1}$

פיתרון סופי: $\boxed{y(k) = 1 - 2^k + 3k2^k}$

ממוצע אקספוננציאלי: $M(n) = (1-w)x(n-1) + w(n-1)$ - הנתונים מהעבר "נמחקים" לאט לאט ולא נשמרים.

פיתרון מערכת הפרשים ע"י לכסון:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v(k) = 2^k\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1,$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ E^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לאחר הטרנספורמציה: $y = E^{-1}x$ מתקבלת המערכת:

$y_1(k+1) - 2y_1(k) = 2\cdot 2^k \quad y_1(0) = 0$

$y_2(k+1) + y_2(k) = -2^k,\ y_2(0) = 0$

כעת ניתן לפתור כל משוואה בנפרד.

צורת ז'ורדן: כאשר המטריצה לא לכסינה, ניתן למצוא ו"ע מוכללים, המקיימים: $(A-\lambda I)v_1 = 0,\ (A-\lambda I)v_2 = v_1, \cdots$. ואז המטריצה: $E = (v_1 \ \ v_2)$ מקיימת: $E^{-1}AE = (jordan)$.

פיתרון מערכת עם מטריצה לא לכסינה (ז'ורדן):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x(k+1) = Ax(k)$$

אמנם לא ניתן ללכסן, אבל את המשוואה השנייה ניתן לפתור קודם: $x_2(k+1) = 2x_2(k) \ \rightarrow \ \lambda = 2,\ x_2(k) = x_{h,2}(k) = c_1 2^k$.

מציבים ת"ה: $c_1 = 1$. ולכן: $\boxed{x_2(k) = 2^k}$. כעת ניתן להציב זאת במשוואה הראשונה: $x_1(k+1) = 2x_1(k) + 2^k$ ולפתור כרגיל.

פיתרון מערכת משוואות הפרשים:

וקטורים עצמיים וערכים עצמיים:

למטריצה ריבועית A לא סינגולרית כל וקטור v, וסקלר λ, המקיימים את המשוואה:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

נקראים וקטור עצמי, וערך עצמי בהתאמה.

- ע"מ למצוא את הערכים העצמיים של A יש לפתור את המשוואה הבאה:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

($\det(\cdot)$ - דטרמיננט של המטריצה)

- ע"מ למצוא את הוקטור העצמי v, המתאים לערך עצמי λ יש לפתור את מערכת המשוואות:

$(A - \lambda \cdot I)v = 0$ **תמיד יש דרגת חופש אחת**

כאשר באיבר הראשון של הוקטור v נציב 1 (כך נהוג, לא חובה – אפשר כל ערך השונה מ-0).

פתרון הומוגני של מערכת משוואות:

ידוע כי פתרון כלשהו למשוואה הומוגנית הינו מהצורה: $\lambda^k \cdot v$, נציב במערכת ההומוגנית $X(k+1) = A \cdot X(k)$ (הקלט שווה אפס) ונקבל:

$$\lambda^{k+1} \cdot v = A \cdot \lambda^k \cdot v$$
$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

($\lambda = 0$ פתרון טריוויאלי, ולא מעניין).

כלומר כל זוג ערך עצמי ווקטור עצמי של המטריצה A מגדיר פתרון למערכת ההומוגנית.

במערכת היסודית יופיעו הרכיבים הבאים: $\left\{y^i(k) = \lambda_i^k \cdot v_i\right\}$ $\leftarrow$ $X_h(k) = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot y^i(k)$

(a_i- סקלרים, p - דרגת מערכת המשוואות)

- קיים ערך m עצמי בעל ריבוי r>1:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים בעלי ריבוי 1) r הרכיבים הבאים:

$$\lambda_m^k v_{m_j}$$

<u>כאשר יש לדאוג לכך ש- r וקטורים עצמיים v_{m_j} יהיו בת"ל.</u>

- קיים צמד ערכים עצמיים מרוכבים $\lambda_i, \overline{\lambda_i}$:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$\begin{cases} y^1(k) = \dfrac{(\lambda_i)^k v_i + (\overline{\lambda}_i)^k \overline{v}_i}{2} = \Re(\lambda_i^{\,k} \cdot v_i) \\ y^2(k) = \dfrac{(\lambda_i)^k v_i - (\overline{\lambda}_i)^k \overline{v}_i}{2i} = \Im(\lambda_i^{\,k} \cdot v_i) \end{cases}$$

← ולכן בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים

$$X_h(k) = a_1 y^1(k) + a_2 y^2(k) + ...$$

(a_i- סקלרים)

פתרון פרטי של מערכת המשוואות:

כמו במשוואת הפרשים, נצטמצם למקרה של צד ימין מהצורה הבאה:

$$u(k) = \Re(v(k)), \qquad v(k) = \nu^k (p_0 + k \cdot p_1 + ... + k^m p_m), \quad \nu = r cis(\phi)$$

כאשר:

$\Re(a)$ - החלק הממשי של מספר/וקטור a.

ν - מספר (ממשי או מרוכב) אם ν ע"ע של A <u>האלגוריתם עלול לא להתאים</u>.

$p_0, p_1, ..., p_m$ – וקטורים עם אלמנטים ממשיים או מרוכבים.

כלומר ננסה להציג את צד ימין הנתון u(k) כחלק ממשי של סדרה v(k).

- צורת הפתרון למערכת עם <u>צד ימין</u> **v(k)**: $X^\nu(k+1) = AX^\nu(k) + v(k)$ הינה:

$$X^\nu(k) = \nu^k (r_0 + k \cdot r_1 + ... + k^m \cdot r^m)$$

כאשר $r_0, r_1, ... r_m$ וקטורים עם אלמנטים ממשיים או מרוכבים.

- הפתרון הפרטי של המערכת יהיה:

$$X_p(k) = \Re\left(X^\nu(k)\right)$$

כלומר החלק הממשי של הפתרון $X^\nu(k)$, שמצאנו בסעיף הקודם.

פתרון כללי למערכת המשוואות:

$$X(k) = X_h(k) + X_p(k)$$

כלומר הפתרון הכללי יהיה סכום של הפתרון ההומוגני והפתרון הפרטי. בכדי למצוא את המקדמים החסרים (מהפתרון ההומוגני) יש להציב תנאי ההתחלה, ולפתור את מערכת המשוואות.

פיתרון מערכת משוואות הפרשים:

<u>המשוואות הנתונות:</u>

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_1(k) + 4y_2(k) + 2^k \\ y_2(k+1) = 3y_1(k) - 4y_2(k) + k \cdot 3^k \end{cases}$$

<u>סידור:</u> $\Rightarrow y(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} y(k) + 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} k$

פיתרון הומוגני:

<u>פ"א:</u> $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-4-\lambda) - 12 = \lambda^2 + 3\lambda - 16 = 0$

<u>ו"ע:</u>

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 4 \\ 3 & -4-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.69 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{73}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 4 \\ 3 & -4-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.44 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{73}}{2}$$

***יש דרגת חופש! לכן מציבים 1 במקום הראשון בווקטור.**

$$\boxed{y_h(k) = c_1 \left(\frac{-3+\sqrt{73}}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1.69 \end{pmatrix} + c_2 \left(\frac{-3-\sqrt{73}}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0.44 \end{pmatrix}}$$

פיתרון פרטי:

מתייחסים לקלט כסכום של שני קלטים.

1) $u_1(k) = 2^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = 2, p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m = 0, \phi = 0$. 2 לא ע"ע.

<u>ניחוש לפיתרון:</u> $y_1^v(k) = 2^k r_0$

<u>הצבת הניחוש:</u> $2^{k+1} r_0 = A2^k r_0 + 2^k p_0 \Rightarrow -p_0 = (A-2I) r_0$

<u>פתרון פרטי-1:</u> $y_{p,1}(k) = 2^k \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

2) $u_2(k) = 3^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} k \Rightarrow v = 3, p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, m = 1, \phi = 0$ 3 לא ע"ע.

<u>ניחוש לפיתרון:</u> $y_2^v(k) = 3^k (r_0 + r_1 k)$

<u>הצבת הניחוש:</u> $3^{k+1}\left(r_0 + r_1(k+1)\right) = A3^k (r_0 + r_1 k) + 3^k p_1 k$

<u>השוואת מקדמים:</u> $\begin{cases} 3r_1 = (A-3I) r_0 \\ -p_1 = (A-3I) r_1 \end{cases}$

<u>פיתרון פרטי-2:</u> $y_{p,2}(k) = 3^k \left[\begin{pmatrix} -27 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} k\right]$

$$\boxed{y_p(k) = 2^k \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} + 3^k \left[\begin{pmatrix} -27 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} k\right]}$$

<u>**פתרון כללי:**</u> $\boxed{y(k) = y_h(k) + y_p(k)}$

* אם יש תנאי התחלה: מציבים ומוצאים את c_1, c_2

ע"ע מריבוי גדול מ-1:

כאשר יש שורש מריבוי-2, אפשר למצוא ו"ע נוסף ע"י:

$$Av_2 = \lambda v_2 + v_1 \Rightarrow \boxed{(A - \lambda I) v_2 = v_1}$$

<u>**דוגמא:**</u> עבור הפ"א: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 \to \boxed{\lambda_{1,2} = 3}$

<u>ו"ע אחד מוצאים כרגיל:</u> $\det(A-3I) v_1 = 0 \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>ו"ע שני, לפי הנוסחה:</u> $Av_2 = \lambda v_2 + v_1 \to \boxed{(A - \lambda I) v_2 = v_1}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. וכעת הפיתרון ההומוגני מעט שונה:

$$\boxed{y_h(k) = c_1 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \left[3^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k3^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]}$$

כלומר: את c_2 כופלים ברכיב נוסף שמכיל את הו"ע הראשון.

יציבות ושיווי משקל:

הגדרה: כל מצב מערכת מסוים נקרא מצב שיווי משקל אם לאחר שהמערכת הגיעה אליו והקלט קבוע, היא תישאר בו (ולכן הפלט לא ישתנה).

משפט:

1. וקטור x_u הוא מצב שיווי משקל התואם לוקטור קלט נתון u אם ורק אם x_u מקיים את המשוואה הוקטורית הבאה: $(I-A)x_u^*=u \Rightarrow \quad x_u^*=(I-A)^{-1}u$

   כאשר: x_u^* וקטור שיווי המשקל, u גודל הקלט הקבוע
2. לכל מערכת דינמית שבה 1 אינו ערך עצמי של המטריצה A שיווי-המשקל הוא יחיד
3. כאשר במערכת דינמית 1 ערך עצמי של המטריצה A יתכנו רק שני המצבים הבאים:
   - א. וקטור שיווי המשקל אינו קיים.
   - ב. וקטור שיווי המשקל אינו יחיד.

יציבות אסימפטוטית:

הגדרה: מערכת משוואות הפרשים נקראת יציבה אסימפטוטית אם ורק אם כל פתרון הומוגני שלה מתכנס לאפס, כאשר k שואף לאינסוף (עבור כל תנאי התחלה).

- אם $|\lambda_i|<1$ לכל i המערכת יציבה אסימפטוטית ונאמר שכל שיווי המשקל של המערכת הוא יציב אסימפטוטית

משפט: כאשר מערכת יציבה אסימפטוטית מתקיים:

1. קיים שיווי משקל יחיד.
2. שיווי המשקל יציב, כלומר:

$$\forall u(k)\to u, \quad \forall x(0),$$
$$x(k)\to x_u^*$$

תוצאות של יציבות אסימפטוטית:

1- לא ע"ע, ולכן לכל קלט קבוע v יש ש"מ יחיד x והמערכת תתכנס אליו החל מכל מצב.

- לכל קלט מחזורי (sin/cos) יש פיתרון מחזורי יחיד, בעל אותו זמן מחזור.
- שני קלטים "קרובים" עם תנאי התחלה קרובים יובילו לפתרונות קרובים.

מציאת מצב שווי-משקל:

$$x(k+1)=\begin{pmatrix}2&3\\0&-2\end{pmatrix}x(k)+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$x_u^*(k)=(I-A)^{-1}u\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-2\\1/3\end{pmatrix}}$$

בדיקה- האם המערכת יציבה אסימפטוטית?

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda&2\\0&-1-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow\pi(\lambda)=\lambda^2-1,\ \lambda_{1,2}=\pm1$$

שני השורשים בערך מוחלט שווים ל-1- לא יציב אסימפטוטית.

משוואות ומערכות דיפרנציאליות

משוואה דיפרנציאלית: משוואה מהצורה הבאה:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)=A_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+A_2(t)\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}y(t)+\dots+A_{n-1}(t)\frac{d}{dt}y(t)+A_n(t)y(t)+u(t)$$

כאשר הפרמטרים $A_1(t),\dots,A_n(t)$ קבועים המשוואה נקראת משוואה דיפ' עם מקדמים קבועים (עם n תנאי התחלה).

פיתרון משוואה דיפרנציאלית ע"י פיתרון הומוגני ופרטי:

פתרון משוואה דיפרנציאלית עם מקדמים קבועים הוא מהצורה:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

$y_h(t)$ – פתרון הומוגני (מתקן את תנאי ההתחלה של הפתרון הפרטי).

$y_p(t)$ – פתרון פרטי (פתרון המשוואה לתנאי התחלה כלשהם)

מערכת יסודית של פתרונות למשוואה דיפרנציאלית הומוגנית:

ננחש כפתרון הומוגני ביטוי מהצורה $e^{\lambda t}$, ונמצא את כל ה-λ האפשריים (שורשי הפולינום האופייני של המשוואה).

- כאשר ריבוי כל השורשים 1, וכולם ממשיים תהיה המערכת היסודית:

$$\{e^{\lambda_i t}\}\to y_h(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot e^{\lambda_i t}$$

כשיש שורש מרוכב אחד, גם משתמשים בזה

- כאשר בפולינום שורש λ מריבוי r, יופיעו בפתרון ההומוגני (בנוסף לאיברים בגין השורשים הלא מרובים) r הרכיבים הבאים:

$$c_i t^i e^{\lambda t} \quad 0\le i\le r-1$$

- כאשר חלק מהשורשים מרוכבים, אזי עבור כל צמד שורשים מרוכבים $\lambda_{1,2}=a\pm bi$ יופיעו בפתרונות ההומוגני הרכיבים הבאים:

$$c_1e^{at}\cos(bt)+c_2e^{at}\sin(bt)$$

הסבר: עבור משוואה עם מקדמים ממשיים נרצה לקבל מערכת יסודית ממשית. לכן נרכיב קומבינציה ליניארית של השורשים המרוכבים אשר תגדיר מערכת יסודית ממשית:

$$\left\{\begin{aligned}y^1(k)&=\frac{e^{(a+bi)t}+e^{(a-bi)t}}{2}=e^{at}\cos(bt)=\Re(e^{(a+bi)t})\\ y^2(k)&=\frac{e^{(a+bi)t}-e^{(a-bi)t}}{2i}=e^{at}\sin(bt)=\Im(e^{(a+bi)t})\end{aligned}\right\}$$

*) לחישוב יש להשתמש בנוסחת אוילר: ($e^{\pm bti}=\cos(bt)\pm i\sin(bt)$)

פתרון פרטי למשוואה דיפרנציאלית נמצא עבור קלט מהצורה:

$$u(t)=\Re(v(t)); \qquad v(t)=e^{(\gamma+\omega i)t}(p_0+p_1t+\dots+p_mt^m); \quad \nu=(\gamma+\omega i)$$

- נמצא את הפרמטרים m,γ,ω ונבנה את המספר:

$$(i=\sqrt{-1}) \qquad \nu=\gamma+i\omega$$

- נסמן ב-l את ריבוי של ν בפולינום האופייני.
- ננחש צורת הפתרון:

$$y_p(t)=(r_lt^l+\dots r_{l+m}t^{l+m})\cdot e^{\gamma t}\cdot\cos(\omega t)+(s_lt^l+\dots s_{l+m}t^{l+m})\cdot e^{\gamma t}\cdot\sin(\omega t)$$

- נציב את צורת הפתרון הפרטי $y_p(t)$ שמצאנו לתוך משוואה המקורית למציאת המקדמים.

מציאת הפתרון הכללי:

- נחבר את שני הפתרונות ע"י:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

- נציב תנאי התחלה, ונמצא את מקדמי הפתרון ההומוגני.

פיתרון משוואה דיפ':

$$\frac{d^3}{dt}y(t)-64\frac{d}{dt}y(t)=128\cos(8t)-64e^{8t}$$

פ"א: $\lambda^3-64\lambda=0 \quad \lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm8$

פיתרון הומוגני: $\boxed{y^h(t)=c_1+c_2e^{8t}+c_3e^{-8t}}$

למציאת פתרון פרטי נחלק את הקלט:

$$u_1=128\cos(8t),\ u_2=-64e^{8t}$$

$$v_1=128e^{8it}\ \Rightarrow\ v=8i,\ l=0 \qquad y_{p1}(t)=r_0\cos(8t)+s_0\sin(8t)$$

$$v_2=-64e^{8t}\ \Rightarrow\ v=8,\ l=1 \qquad y_{p2}(t)=r_1te^{8t}$$

ניחוש לפיתרון הפרטי: $\boxed{y_p(t)=r_0\cos(8t)+s_0\sin(8t)+r_1te^{8t}}$

גזירה והצבה: גוזרים 3 פעמים ומציבים במשוואה המקורית:

$$16r_0\sin(8t)-16s_0\cos(8t)+2r_1e^{8t}=2\cos(8t)-e^{8t}.$$

משווים מקדמים של: $\cos(8t),\sin(8t),e^{8t}$ ומוצאים את הנעלמים.

נגזרות טריגונומטריות: $\cos'(x) = -\sin(x)\quad \sin'(x) = \cos(x)$

הוצאת שורש מסדר n: $\boxed{\lambda^n = a \Rightarrow \lambda_{1,\dots,n} = \sqrt[n]{a}\,cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\quad k=0,\cdots,n-1}$

תצוגה טריגונומטרית: $x+yi \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

העלאה בחזקה: $(rcis(\theta))^k = r^k cis(\theta k)$

חוקי גזירה: $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

זהויות טריגונומטריות:

$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$ $\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

$\boxed{\cos\alpha = \cos(-\alpha)}$ $\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$ $\boxed{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha}$ $\boxed{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha}$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\pi k) &= (-1)^k\sin\alpha\\ \cos(\alpha+\pi k) &= (-1)^k\cos\alpha\end{aligned}}$$

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

אלגברה ליניארית:

דטרמיננטה בעזרת השורה ה-i:

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3}$$

ו"ע לע"ע עם ריבוי: יש דרגת חופש נוספת לכל ריבוי.

משפט: לפולינום מדרגה p משתנה יחיד יש בדיוק p שורשים.

טריקים למציאת ע"ע:

- דטרמיננטה של מטריצה = מכפלת הערכים העצמיים.
- עקבה של מטריצה - סכום הערכים העצמיים.

-אם סכום הערכים בעל עמודה- λ_0, זהו ערך עצמי.

-אם סכום הערכים בכל שורה- λ_0, זהו ע"ע ששיך לו"ע (11..).

ע"ע מריבוי 2: מוצאים ו"ע אחד באופן רגיל- v_1 ואת השני

מוצאים לפי הנוסחה: $\boxed{(A-\lambda I)v_2 = v_1}$ ואז הפתרון ההומוגני

הינו: $\boxed{x_h(t) = c_1e^{\lambda t}v_1 + c_2e^{\lambda t}(v_2 + v_1t)}$

טיפול בקלט מיוחד: כאשר מופיע בקלט $\mathbf{a^t}$ אז כדי להתאים לנוסחאות

יש להופכו ל: $e^{(\ln a)t} = e^{\ln(a^t)} = a^t \Leftarrow \boxed{v = \ln a}$

פיתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות:

פתרון הומוגני:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = A(t)\underline{x}(t) + v(t),\ t\ge 0}$$

פתרון בסיסי למשוואה הומוגנית הוא מהצורה: $e^{\lambda t}\cdot v$

כאשר: λ - ערך עצמי של המטריצה A.

v – וקטור עצמי של המטריצה A.

כלומר כל זוג ערך עצמי וקטור עצמי של המטריצה A מגדיר פתרון למערכת ההומוגנית.

מערכת הפתרונות היסודית של המשוואה ההומוגנית והפתרון ההומוגני יהיו:

- ערכים עצמיים ממשיים מריבוי 1:

במערכת היסודות יופיעו פתרונות הבאים: $\left\{y^i(t) = e^{\lambda_i t}\cdot v_i\right\} \rightarrow x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot e^{\lambda_i t}\cdot v_i$

- קיים ערך m עצמי בעל ריבוי r>1:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים בעלי ריבוי 1) r רכיבים הבאים:

$e^{\lambda_m t}v_{m_j}$ כאשר יש לדאוג לכך ש- r וקטורים עצמיים v_{m_j} יהיו בת"ל.

- קיים צמד ערכים עצמיים מרוכבים $\lambda_i, \overline{\lambda_i} = a \pm ib$:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$\begin{cases} y^1(k) = \dfrac{e^{(a+ib)t}v_i + e^{(a-ib)t}\overline{v_i}}{2} = \Re(e^{(a+ib)t}\cdot v_i)\\ y^2(k) = \dfrac{e^{(a+ib)t}v_i - e^{(a-ib)t}\overline{v_i}}{2i} = \Im(e^{(a+ib)t}\cdot v_i)\end{cases}$$

← ולכן בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים

הבאים: $X_h(t) = a_1y^1(t) + a_2y^2(t) + \dots.$

פתרון פרטי: פתרון פרטי יטופל באופן דומה כמו שטופל במערכת משוואות הפרשים עם שינויים מתאימים.

כמו במשוואה דיפרנציאלית, נצטמצם למקרה של צד ימין מהצורה הבאה:

$$u(t) = \Re(v(t)),\qquad v(t) = e^{\nu t}(p_0 + p_1t + \dots + p_mt^m)\quad \nu = \gamma + \omega i$$

כאשר:

$\Re(a)$ - החלק הממשי של מספר/וקטור a.

ν - מספר (ממשי או מרוכב) אם ν ע"ע של A האלגוריתם עלול לא להתאים.

$p_0, p_1, \dots, p_m$ – וקטורים עם אלמנטים ממשיים או מרוכבים.

כלומר ננסה להציג את צד ימין הנתון u(t) כחלק ממשי של סדרה v(t).

- צורת הפתרון למערכת עם **צד ימין v(t)**: $\frac{d}{dt}x^\nu(t) = Ax^\nu(t) + v(t)$ הינה:

$$X^\nu(t) = e^{\nu t}(r_0 + r_1t + \dots + r_mt^m)$$

כאשר $r_0, r_1, \dots r_m$ וקטורים עם אלמנטים ממשיים או מרוכבים.

- הפתרון הפרטי של המערכת יהיה:

$$X_p(t) = \Re\left(X^\nu(t)\right)$$

כלומר החלק הממשי של הפתרון $X^\nu(t)$, שמצאנו בסעיף הקודם.

פתרון כללי למערכת המשוואות:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

כלומר הפתרון הכללי יהיה סכום של הפתרון ההומוגני והפתרון הפרטי. בכדי למצוא את המקדמים החסרים (מהפתרון ההומוגני) יש להציב תנאי ההתחלה, ולפתור את מערכת המשוואות.

הפיכה למערכת משוואות מסדר ראשון:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2r(t)}{dt^2} - r(t)\dfrac{d\theta(t)}{dt} = -\dfrac{k}{r^2(t)}\\ r(t)\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\dfrac{d\theta(t)}{dt}\dfrac{dr(t)}{dt} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y_2(t)\\ y_2'(t) = y_1(t)y_4(t) - \dfrac{k}{y_1^2(t)}\\ y_3'(t) = y_4(t)\\ y_4'(t) = -\dfrac{2y_4(t)y_2(t)}{y_1(t)}\end{cases}$$

צריך להפוך בהתאם גם את תנאי ההתחלה

$$define: y(t) = \left\{r(t), \frac{dr(t)}{dt}, \theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}\right\}$$

דרך פיתרון מערכת:

$$\begin{cases} f'(x) = 4f(x) + g(x) + 1 + 2x\\ g'(x) = 2f(x) + 3g(x) + e^{3x}x^2\end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

פיתרון הומוגני: מוצאים פ"א, מוצאים ע"ע, מוצאים ו"ע:

$$y_h(t) = c_1e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Leftarrow \lambda_1 = 5, v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \lambda_2 = 2, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

פיתרון פרטי: מפרקים לשני קלטים: $u_1(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}t, u_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t^2$

מוצאים כל פיתרון פרטי לחוד וגוזרים: $y_1^x(t) = r_0 + r_1x,\ y_1^{x\prime}(t) = r_1$

הצבת ניחוש: $r_1 = A(r_0 + r_1t) + p_0 + p_1t \Rightarrow r_1 = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}(r_0 + r_1t) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}t$

בידוד מקדמי: $1,t,t^2$ ומציאת הווקטורים: r_0, r_1.

לאחר-מכן:

1. מציאת פיתרון פרטי 2 באותו אופן.
2. חיבור שני הפתרונות הפרטיים לפיתרון פרטי אחד.
3. חיבור הפיתרון ההומוגני עם הפיתרון הפרטי.
4. הצבת תנאי התחלה למציאת הווקטורים c_1, c_2.

פיתרון מערכת דיפרנציאלית ע"י לכסון:

ניתן למצוא פתרון כללי ע"י **לכסון** המערכת (במקרה שניתן למצוא לכל ע"ע מספיק ו"ע בלתי תלויים ליניארית):

- מציאת ו"ע של המערכת: $v_1,\dots,v_n$.
- בניית המטריצה E שעמודותיה הם הו"ע.

$$E=(v_1\,|\,v_2\,|\ldots|\,v_n)$$

- מעבר לנעלם $z(t)$ שיחושב כך:

$$z(t)=E^{-1}\cdot x(t)\quad [x(t)=E\cdot z(t)]$$

- המערכת החדשה (לאחר הצבה במערכת המקורית):

$$E\cdot z'(t)=A\cdot E\cdot z(t)+u(t)$$

תנאי התחלה מתוקנים:

$$z(0)=E^{-1}x(0)$$

- נכפיל את שני האגפים ב- E^{-1} ונקבל את המערכת:

$$z'(t)=\underbrace{E^{-1}\cdot A\cdot E}\cdot z(t)+E^{-1}u(t)$$

- ידוע מאלגברה כי:

$$E^{-1}\cdot A\cdot E=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

ולכן קבלנו מערכת אלכסונית אותה קל לפתור

פיתרון משוואה עם לכסון (כאשר v בפיתרון הפרטי הוא ע"ע):

$\frac{d}{dt}x(t)=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}7\\ 3\end{pmatrix}e^t$. ע"ע של A הם: $\lambda_{1,2}=\pm 1$ וגם $v=1$.

<u>מוצאים ע"ע של A:</u> $\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ <u>ובונים מטריצה:</u> $E=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

<u>מחשבים מטריצה הופכית:</u> $E^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ <u>ומכפילים בקלט:</u> $E^{-1}u(k)=e^t\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. <u>מציבים במשוואה חדשה</u> $\frac{dz(t)}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}z(t)+e^t\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

כעת בגלל שהמטריצה היא אלכסונית, פירוק למשוואות יפריד את שני המשתנים לשתי משוואות שונות, אותן ניתן לפתור לחוד:

$$\begin{cases}\frac{dz_1(t)}{dt}=z_1(t)+e^t\\ \frac{dz_2(t)}{dt}=z_2(t)+2e^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1, & \boxed{y_{h1}(t)=c_1e^t}\\ \lambda_2=-1, & \boxed{y_{h,2}(t)=c_2e^{-t}}\end{cases}$$

$$u_1(t)=e^t,\ v=1, m=0, l=1\to y_1^v(t)=r_1te^t, r_1=1.\ \boxed{y_{p,1}(t)=te^t}$$

$$u_2(t)=2e^t, v=1, m=0, l=0\to y_2^v(t)=r_0e^t, r_0=1.\ \boxed{y_{p,2}(t)=e^t}$$

***כשפותרים משוואה אחת, מותר ש-v יהיה ע"ע של הפ"א!**

מציבים ב- $z(t)$ <u>ומבצעים שוב החלפת משתנים:</u>

$x(t)=Ez(t)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1e^t+te^t\\ c_2e^{-t}+e^t\end{pmatrix}=\boxed{e^t\begin{pmatrix}c_1+3c_2+t+3\\ c_1+c_2+t+1\end{pmatrix}}$ כעת ניתן להציב ת"ה.

<u>משפט:</u> אם λ ע"ע עם ו"ע v של A אז קיים פיתרון הומוגני $x(t)=e^{\lambda t}v$ (כלומר: המקדמים לשאר הרכיבים שווים ל-0).

<u>משפט:</u> הפתרונות ההומוגנים מהווים מרחב ווקטורי ממימד n.

$$\boxed{\underline{x}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}v_1+c_2e^{\lambda_2 t}v_2+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}v_n}$$

<u>משפט:</u> בכל רגע t ההסת' להיות בכל מצב: $0\le x_i(t)\le 1$.

<u>תרגיל ממבחן:</u>

אם כל הע"ע של A שונים, צ"ל שהם כולם ממשיים.

ניח בשלילה שקיים λ_1 מרוכב, אז קיים ווקטור מקדמים שבו כולם שווים ל-0 ו-1 $c_1=1$. אז הפיתרון הינו: $e^{-\lambda_1 t}v_1$ וגם $v_1\neq 0$. והוא גם ממשי כי ההסת' בזמן 0 הינה מספר ממשי. אבל ההסת' בזמן 1 הינה מספר מרוכב, סתירה.

מציאת מטריצה הופכית:

א. מציאת מטריצה הפוכה במקרה של [2*2]:

עבור $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ אם $ad-bc\neq 0$ אזי $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

ב. מציאת מטריצה הפוכה במקרה של [3*3]:

יהיה i אינדקס עבור שורות ו j אינדקס עבור עמודות.

עבור $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ אם $\det(A)\neq 0$ אזי $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot B$

כאשר איברי מטריצה B הינם מהצורה:

$$b_{i,j}=(-1)^{i+j}\cdot Adj_A(i,j)$$

$$Adj_A(i,j)=\det(\overline{A}(i,j))$$

$\overline{A}(i,j)$ - הינה מטריצה בלי עמודה ה – i ובלי שורה ה – j.

או בקיצור:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{13} & a_{12}\\ a_{33} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{23} & a_{21}\\ a_{33} & a_{31}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{12} & a_{11}\\ a_{32} & a_{31}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

שרשראות מרקוב:

<u>הגדרה:</u> n מצבים, בכל רגע t "השרשרת" נמצאת באחד מהמצבים i=1,...,n.

<u>p_{ij}-</u> "קצב", המעבר ממצב i למצב j. ההסתברות למעבר בפרק זמן "קטנטן" Δt היא: $p_{ij}\Delta t\cong$.

<u>בניית משוואה דיפרנציאלית עבור שרשרת מרקוב:</u>

$x_i(t)=$ההסתברות שהשרשרת נמצאת במצב i בזמן t.

$$x_1(t+\Delta t)=\underbrace{x_1(t)(1-p_{12}\Delta t-p_{13}\Delta t)}_{staying}+\underbrace{x_2(t)p_{21}\Delta t}_{moving\ to-2}+\underbrace{x_3(t)p_{31}\Delta t}_{moving\ to-3}$$

$$\frac{d}{dt}x_1(t)=-(p_{12}+p_{13})x_1(t)+p_{12}x_2(t)+p_{31}x_3(t)$$

<u>הצגה בצורת מטריצות:</u>

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(p_{12}+p_{13}) & p_{21} & p_{31}\\ p_{12} & -(p_{21}+p_{23}) & p_{32}\\ p_{13} & p_{23} & -(p_{31}+p_{32})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$$

תנאי ההתחלה- התפלגות ההסתברות למצבים בזמן $t=0$: $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{pmatrix}$.

<u>על האלכסון:</u> סכום קשתות יוצאות מ-i × (-1).

<u>בתא [I,j]:</u> קשת נכנסת ל-i מ-j.

<u>שרשרת אי-פריקה:</u> שרשרת שיש לה מסלול מכוון (עם קצבים חיוביים) מכל מצב לכל מצב.

<u>הסת' סטציונרית:</u> לשרשרת אי-פריקה קיים בדיוק ווקטור הסת' סטציונרי יחיד, הו"ע המתאים ל- $\lambda=0$ מנורמל כך שסכום רכיביו = 1. לדוגמא: $\lim_{t\to\infty}x(t)=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}16\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$

<u>הערה:</u> ממנו ניתן לחלץ $x_i(t)$ לכל i.

מערכות ליניאריות

מעבר מדיאגרמת בלוקים למערכת משוואות מצב:

מסמנים כל יציאה ממשהה i במשתנה : $x_i(k)$.

רושמים מערכת שבה מצד שמאל $x_i(k+1)$ ומצד ימין, מה שנכנס למשהה.

מוסיפים משוואת פלט : $y(k)$ שמחושבת ע"י מה שנכנס אליו.

ייצוג משוואת מצב בצורת מטריצה כללית:

$$\begin{cases} x(k+1)=A\underline{x}(k)+b\underline{u}(k) \\ y(k)=C^T\underline{x}(k)+d\underline{u}(k) \end{cases}$$

A- מטריצת המקדמים של המשתנים $x_1(k),\dots,x_n(k)$.

b- הווקטור של סקלרים בהם יש לכפול את הקלט לפני כניסת הקלט לתוך כל משהה.

C^T- ווקטור של סקלרים בהם יש לכפול את הפלטים של המשהים לפני יציאה לפלט ($y(k)$).

d- ווקטור שלפיו כופלים את הקלט ($u(k)$) לפני יציאה לפלט ($y(k)$).

מעבר ממערכת משוואת מצב למשוואת הפרשים:

1. מבטאים את כל ה- $x_i(k)$ באמצעות $y(k-p)$ ע"י הצבות במשוואות המצב.
2. מציבים במשוואת המצב הראשונה את ההצבות ל- $y(k-p)$. ואז עוברים ל- $y(k)$ מצד שמאל, ובהתאם משנים את הפרמטרים גם בצד ימין.

מעבר ממשוואת הפרשים לדיאגרמת בלוקים:

לכל $y(k-p)$, דרושים p משהים בדרך מיציאת הפלט.

לכל $u(k-p)$ דרושים p בדרך, ישירות מהקלט, ללא מעבר בפלט.

מעבר מדיאגרמת בלוקים למשוואת הפרשים:

מסמנים כל יציאה ממשהה p שאליו נכנס הפלט ב- $y(k-p)$.

מסמנים כל יציאה ממשהה p שאליו נכנס הקלט ב- $u(k-p)$.

מעבר מפונקציית תמסורת למשוואת הפרשים:

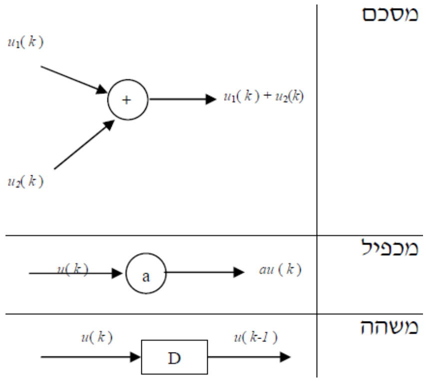
$H(z)=\dfrac{1}{z^3-5z^2+2z+8}$ כעת המעבר מתבצע לפי הנוסחה :

$H(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)} \to Y(z)\left(z^3-5z^2+2z+8\right)=U(z)$ ואז מתקבלת התמרת ה-z :

$z^3Y(z)-5z^2Y(z)+2zY(z)+8Y(z)=U(z)$ ואז ניתן לבצע הזזה

בזמן למשוואת הפרשים : $\boxed{y(k+3)-5y(k+2)+2y(k+1)+8y(k)=u(k)}$

מערכת שמורכבת מ-3 בלוקים בסיסיים:



תכונות (אקסיומות) קלט/פלט של מערכות ליניארית:

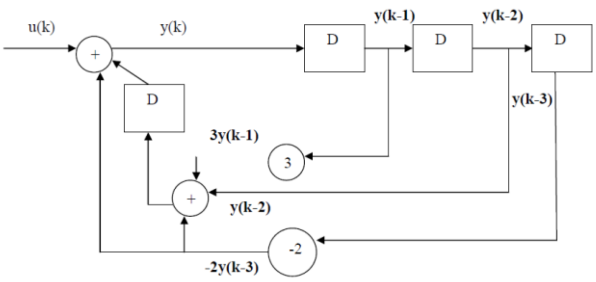
קיום ויחידות: לכל קלט $u(k)$ (סדרה דו-צדדית עם התחלה), קיים פלט $y(k)$ יחיד גם כן, סדרה עם התחלה.

טענת-עזר: פלט (של מערכת ליניארית) לא מקדים את הקלט, כלומר : אם לכל $k<k_0$, $u(k)=0$ אז גם $y(k)=0$.

ליניאריות: $u=\alpha u'+\beta\mu'',\quad y=\alpha y'+\beta y''$

סיבתיות: המערכת לא חוזה את העתיד, כלומר : הפלט $y(k)$ תלוי בקלט רק ברגעים $i\le k$, $u(i)$.

קביעות בזמן: אם קלט מושהה $u'(k)=u(k-p)$, אזי גם הפלט : $y'(k)=y(k-p)$.



משוואת הפרשים: $y(k)-3y(k-2)+y(k-3)+2y(k-4)=u(k)$

התמרת Z: $Y(z)-3z^{-2}Y(z)+z^{-3}Y(z)+2z^{-4}Y(z)=U(z)$

תמסורת: $H(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{1}{1-3z^{-2}+z^{-3}+2z^{-4}}=\dfrac{z^4}{z^4-3z^2+z+2}$

קונבולוציה וסדרת הפולס:

קונבולוציה:

$$y(k)=u(k)*h(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u(i)\cdot h(k-i)$$

תכונות הקונבולוציה:

- חילוף: $f*g=g*f$
- קיבוץ: $(f*g)*h=f*(g*h)$
- דו-ליניאריות: $f*(g+h)=f*g+f*h$

$\alpha(f*g)=(\alpha f)*g=f*(\alpha g)$

עובדות (בנוגע לקונבולוציה)

- $\delta(k)*f(k)=f(k)$
- $\delta(k-p)*f(n)=f(k-p)$ $\quad p>0$
- $\delta(k-p_1)*f(k-p_2)=f(k-(p_1+p_2))$ $\quad p_1,p_2>0$

$\delta(k)$ - **סדרת פולס**

$$\delta(k)=\begin{cases}0, k\neq 0\\ 1, k=0\end{cases}$$

$h(k)$ - **תגובת הפולס**. סדרת הפלט התואמת לקלט מיוחד-לפולס.

משפט: סדרת הפלט של מערכת כתגובה לקלט הינה הקונבולוציה בין סדרת הקלט הזו לבין תגובת הפולס של המערכת.

$$y(k)=u(k)*h(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u(i)\cdot h(k-i)$$

$1(k)$ - **סדרת המדרגה**

$$1(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

נוסחת הקונבולוציה באופן עקרוני:

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)\cdot f_2(k-i)$$

פישוט הנוסחה:

1. כאשר $f_1(k)=0\ \forall k<0$ אזי ניתן לכתוב את הנוסחה בצורה הבאה:

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{\infty}f_1(i)\cdot f_2(k-i)$$

2. כאשר $f_2(k)=0\ \forall k<0$ אזי ניתן לכתוב את הנוסחה בצורה הבאה:

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}f_1(i)\cdot f_2(k-i)$$

3. כאשר $f_1(k)=f_2(k)=0\ \forall k<0$ אזי ניתן לכתוב את הנוסחה בצורה הבאה:

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{k}f_1(i)\cdot f_2(k-i)$$

שימו לב שלאחר פישוט הנוסחה לא ניתן להפוך את סדר הקונבולוציה

המשפט היסודי של המערכות הליניאריות: תגובת הפולס h מאפיינת את המערכת ומאפשרת לחשב את הפלט y לכל קלט u.

$$u(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u(i)\delta(k-i)$$

התמרת Z:

הגדרה: התמרת ה-Z של סדרה דו-צדדית עם התחלה $a(k)$, היא טור החזקות הפורמלי: $A(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(k)z^{-k}$

סכום של טור חזקות: $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}}$

פעולות פשוטות:

תהיינה $A(z)=\sum a(k)z^{-k}$, $B(z)=\sum b(k)z^{-k}$

חיבור: $C(z)=A(z)+B(z)=\sum c(k)z^{-k}$, כאשר $c(k)=a(k)+b(k)$

כפל: $D(z)=A(z)\cdot B(z)=\sum d(k)z^{-k}$, כש- $d=a*b$ $d(k)=\sum a(i)b(k-i)$.

תכונות בסיסיות:

ליניאריות: $c(k)=\alpha a(k)+\beta b(k)\Rightarrow c(z)=\alpha A(z)+\beta B(z)$

איבר ניטראלי לחיבור: $A(z)=0$, $0+B(z)=B(z)$ לכל התמרה

קונבולוציה של סדרות מתאימה לכפל התמרות z:

$c=a*b\Rightarrow c(z)=A(z)\cdot B(z)$

איבר יחידה כפלי: $A(z)=1$ - התמרה של סדרת הפולס $\delta(k)$.

$a*\delta=a\Rightarrow A(z)\cdot 1=A(z)$.

קיום הופכי: לכל התמרה $z\neq 0$ יש איבר הופכי ביחס לכפל, כלומר, טור חזקות אחר: $\frac{1}{A(z)}=A^{-1}(z)$ המקיים: $A(z)\cdot A(z)^{-1}=1$.

הזזה בזמן: $f(k-p)=z^{-p}F(z)$

תכונות נוספות: $k\cdot f(k)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}(F(z))$, $a^k f(k)\leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$

דוגמאות להתמרת Z:

	$f(k)$	$F(z)$
(1)Unit impulse	$f(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$	$F(z)=1$
(2)Unit step	$f(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{z-1}$
(3)Unit ramp	$f(k)=\begin{cases}k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$
(4)Geometric series	$f(k)=\begin{cases}a^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{z-a}$
(5)Delayed geometric series	$f(k)=\begin{cases}a^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$	$F(z)=\frac{1}{z-a}$
(6)Geometric ramp	$f(k)=\begin{cases}k\cdot a^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{(z-a)^2}$
(7)Delayed geometric ramp	$f(k)=\begin{cases}(k-1)\cdot a^{k-2} & k\geq 2\\ 0 & k<2\end{cases}$	$F(z)=\frac{1}{(z-a)^2}$

פולס מוזז $\boxed{f(k)=\begin{cases}1 & k=\alpha\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}}$ $\quad\boxed{F(z)=\frac{1}{z^{\alpha}}}$

מציאת סדרת פולס מדיאגרמת בלוקים:

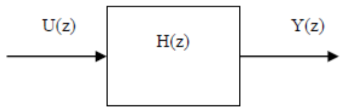
מוצאים פונקציית תמסורת ואז עושים לה התמרת Z הפוכה.
(אין דרך לעשות קונבולוציה הפוכה לפונקציית הקלט).

משפט: התמרות ה-z של סדרות עם התחלה מהוות שדה ביחס לחיבור A+B ולכפל A·B, בפרט, לכל טור חזקות $A(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(k)z^{-k}$ יש הופכי כפלי המקיים $A(z)\cdot A^{-1}(z)=1$

פונקצית תמסורת:

הגדרה: לפי המשפט היסודי- $y=h*u$, כאשר עוברים להתמרת z:

$\boxed{Y(z)=H(z)\cdot U(z)}$ $H(z)$ - **פונקציית התמסורת** של המערכת. ו- $U(z)$ היא התמרת z של הקלט.



פונקציית התמסורת משוואות מצב:

ידוע כי עבור מערכת מהצורה:

$$X(k+1)=AX(k)+bu(k)$$
$$y(k)=c^TX(k)+du(k)$$
$$x(-\infty)=0$$

$$\boxed{H(z)=c^T(zI-A)^{-1}b+d}$$

פונקציית התמסורת מתוך משוואת הפרשים:

$$\boxed{y(k-p)\xrightarrow{Z\ transformation} z^{-p}Y(z)}$$

$$y(k)=u(k-p)\Rightarrow Y(z)=z^{-p}U(z)\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{z^p}$$

מציאת פו' תמסורת ממשוואות מצב:

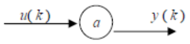
$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_1(k)+2x_2(k)+u(k) \\ x_2(k+1)=-2x_1(k)+x_2(k)+2u(k) \\ y(k)=x_1(k)+x_2(k),\quad x(-\infty)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ c^T=(1\ \ 1)\ \ d=1 \end{cases}$$

$$H(z)=\frac{1}{\det(A)}c^T\cdot adj(A)\cdot b=\frac{1}{(z-1)^2+4}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}z-1 & 2\\ -2 & z-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2+4}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}z+3\\ 2z-4\end{pmatrix}=\boxed{\frac{3z-1}{(z-1)^2+4}}$$

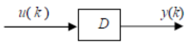
פונקצית תמסורת מדיאגרמת בלוקים:

1. מכפיל



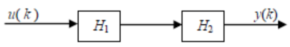
$$y(k)=a\cdot u(k)$$
$$\updownarrow$$
$$Y(z)=a\cdot U(z)\Rightarrow H(z)=a$$

2. משהה



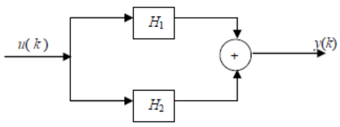
$$y(k)=u(k-1)$$
$$\updownarrow$$
$$Y(z)=z^{-1}U(z)\Rightarrow H(z)=z^{-1}$$

3. חיבור בטור



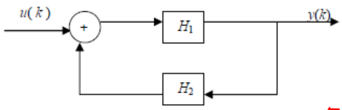
$$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)$$

4. חיבור במקביל



$$H(z)=H_1(z)+H_2(z)$$

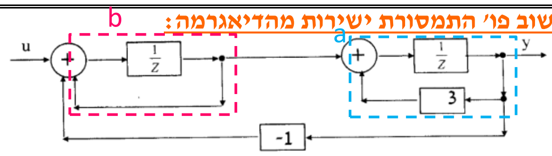
5. היזון חוזר



אפשר להשתמש בשיטה רק עבור מערכות שהקלט נכנס אליהן בעצמן, ללא חיבור עם הפלט!

$$H(z)=\frac{H_1(z)}{1-H_1(z)H_2(z)}$$

חישוב פו' התמסורת ישירות מהדיאגרמה:



$$H_a(z)=\frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}}=\boxed{\frac{1}{z-3}}\qquad H_b(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=\boxed{\frac{1}{z-1}}$$

חיבור בטור של H_a ו-H_b: $H_c(z)=H_a\cdot H_b=\boxed{\frac{1}{(z-1)(z-3)}}$

היזון חוזר: $H(z)=\frac{H_c}{1-H_c\cdot(-1)}=\frac{\frac{1}{(z-1)(z-3)}}{1+\frac{1}{(z-1)(z-3)}}=\frac{1}{z^2-4z+4}=\frac{1}{(z-2)^2}$

התמרת Z הפוכה:

הגדרות:

- פולינום במשתנה z הוא ביטוי מהצורה:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots\dots + a_n z^n$$

- פונקציה רציונלית היא מנת שני פולינומים:

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots\dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots\dots + b_m z^m}$$

- פונקציה רציונלית, בה דרגת המונה (n) קטנה מדרגת המכנה (m) נקראת *Strictly Proper* (*S.P.*)

משפט (המשפט היסודי של האלגברה):

כל פולינום $P(z)$ ניתן לפרוק באופן הבא:

$$P(z) = a_n (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdot \dots \cdot (z-\lambda_n)$$

כאשר λ_i – שורשי הפולינום.

מסקנה:

כל שבר רציונלי ניתן להציג בצורה הבאה:

$$F(z) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}{\prod_{i=1}^{m}(z-q_i)}$$

(p_i - אפסים של $F(z)$, q_i - קטבים של $F(z)$)

טענה:

כל פולינום $F(z)$ בו $n \ge m$ ניתן לכתיבה בצורה הבאה:

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \hat{P}(z) + \frac{P_1(z)}{Q(z)} \quad when \quad \frac{P_1(z)}{Q(z)} \; is \;\; S.P.$$

טענה:

- כאשר נתונה פונקציה רציונלית $F(z)$ *S.P.*, בה המקדם $b_m = 1$, ושורשי המכנה מריבוי 1, אזי ניתן לרשמה בצורה הבאה:

חייבים לנרמל ל-1!

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{c_1}{(z-q_1)} + \frac{c_2}{(z-q_2)} + \dots + \frac{c_m}{(z-q_m)}$$

את המקדמים c_i ניתן לחשב ע"י הנוסחאות הבאות (נוסחאות שקולות):

$$c_i = (z-q_i)\cdot F(z)\big|_{z=q_i}$$

$$c_i = \left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=q_i}$$

חייבים להפוך את דרגת המונה לקטנה מדרגת המכנה!

- כאשר קוטב q_i הוא מריבוי r, אזי בפרוק יופיעו r הרכיבים הבאים:

$$\frac{c_i^1}{(z-q_i)} + \frac{c_i^2}{(z-q_i)^2} + \dots + \frac{c_i^r}{(z-q_i)^r}$$

את המקדמים c_i^{r-k} ניתן לחשב ע"י הנוסחה הבאה:

$$c_i^{r-k} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dz^k}(z-q_i)^r F(z)\right]_{z=q_i}$$

- ניתן להוכיח כי:

$$\frac{A}{(z-a)^{m+1}} \xleftrightarrow{z} \begin{cases} A\cdot \frac{k-m}{k}\binom{k}{m} a^{k-m-1} & k \ge m+1 \\ 0 & k < m+1 \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{1}{(z-\lambda)^n} \Rightarrow f(k) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1))\lambda^{k-n} & k \ge n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

ולכן עבור $m=0$:

$$\frac{A}{(z-a)} \xleftrightarrow{z} \begin{cases} A\cdot a^{k-1} & k \ge 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

ועבור $m=1$:

$$\frac{A}{(z-a)^2} \xleftrightarrow{z} \begin{cases} A\cdot (k-1)\cdot a^{k-2} & k \ge 2 \\ 0 & k < 2 \end{cases}$$

- ההתמרה ההפוכה של צמד שברים אלמנטריים מהצורה: $\frac{c_i^m}{(z-\lambda)^m} + \frac{\overline{c_i^m}}{(z-\overline{\lambda})^m}$ היא:

$$\begin{cases} \frac{1}{(m-1)!}(k-1)(k-2)\cdot \dots \cdot (k-m+1)\cdot 2\cdot \left|c_i^m\right|\cdot|\lambda|^{k-m}\cos((k-m)\phi + \phi_0) & k \ge m \\ 0 & k < m \end{cases}$$

כשאשר ϕ הוא הארגומנט של λ, ו- ϕ_0 הוא הארגומנט של c_i^m.

עבור $m=1$:

$$\begin{cases} 2\cdot|c|\cdot|\lambda|^{k-1}\cos((k-1)\phi + \phi_0) & k \ge 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

נגזרת של טור חזקות:

הנגזרת של טור חזקות:

$$\frac{d}{dz}A(z) = \frac{d}{dz}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a(k) z^{-(k+1)}$$

נגזרת של מכפלה:

$$\frac{d}{dz}\big(A(z)\cdot B(z)\big) = \left(\frac{d}{dz}A(z)\right)\cdot B(z) + A(z)\cdot\left(\frac{d}{dz}B(z)\right)$$

נגזרת של חלוקה:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{A(z)}\right) = -\frac{1}{(A(z))^2}$$

מציאת תגובת הפולס (עם תנאי התחלה):

נתון:

$$y(k+2) - 2y(k+1) + 4y(k) = u(k)$$

$$y(0) = 0,\;\; y(1) = 2\cos(\pi/3)$$

פיתרון הומוגני (מחושב רגיל):

$$y_h(k) = c_1 2^k \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + c_2 2^k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)$$

מציאת פיתרון פרטי לקלט הפולס ע"ע התמרת Z:

$$u(k) = \delta(k) \Rightarrow z^2 Y(z) - 2zY(z) + 4Y(z) = 1$$

התמרת Z הפוכה ל-Y:

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 4} = \frac{c_1^1}{z-(1+\sqrt{3}i)} + \frac{\overline{c}_1^1}{z-(1-\sqrt{3}i)}$$

מציאת מקדמים עבור שורשים מרוכבים:

$$c_1^1 = \left(z-(1+\sqrt{3}i)\right)\cdot Y(z)\Big|_{z=1+\sqrt{3}i} = \frac{1}{2\sqrt{3}i},\;\; \overline{c}_1^1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}i}$$

סדרת המקור (לאחר מעבר לפוי טריגונומטריות):

$$y(k) = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}2^{k-1}\sin\left(\frac{\pi(k-1)}{3}\right)(k-1) + c_1 2^k\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + c_2 2^k \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right.$$

עבור $k \ge 1$, אחרת: 0.

הצבת תנאי התחלה למציאת מקדמי פיתרון הומוגני:

$$y(0) = \boxed{c_1 = 0} \;\; y(1) = 2c_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \to \boxed{c_2 = 1/\sqrt{3}}$$

תגובת הפולס:

$$y(k) = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}2^{k-1}\sin\left(\frac{\pi(k-1)}{3}\right)(k-1) + \frac{2^k}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)\right.$$

מערכות סופיות - אוטומטים

אוטומט סופי דטרמיניסטי

הגדרה: $M=\{S,I,f,s_0,F\}$

i. $S=\{s_0,s_1,\dots,s_n\}$ – קבוצה סופית של מצבים

ii. $I=\{a_0,a_1,\dots,a_m\}$ - א"ב הקלט (קבוצה סופית)

iii. $F=\{f_0,f_1,\dots,f_k\}\subseteq S$ - קבוצת מצבים מקבלים

iv. $f:S\times I\to S$ - פונקצית המעברים

v. $s_0\in S$ - המצב ההתחלתי היחיד

תאור ע"י טבלת מעברים:

השורות של הטבלה מתארות את המצבים

והעמודות את אותיות הקלט

ובמשבצת המתאימה למצב $p\in S$ ולאות $a\in I$ רשום $q\in S$, כאשר $f(p,a)=q$.

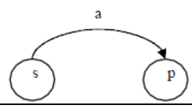
במילים אחרות, אם אוטומט M נמצא במצב $p\in S$ ומקבל קלט $a\in I$, הוא עובר לפי פונקצית המעברים למצב $q\in S$.

תאור ע"י גרף מכוון (דיאגרמת מצבים):

כל צומת מתאר מצב

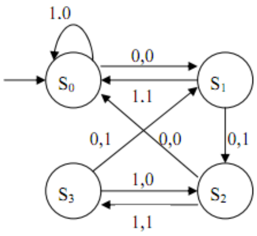
הקשתות מתארות את המעברים בין המצבים לפי פונקצית המעברים ומסומנות ע"י הקלט מתאים.

לדוגמה: אם $M=\{\{s,p,q\},\{a,c\},f,s,\{q\}\}$ ו-$f(s,a)=p$ אז הגרף יכיל



טבלת מעברים ודיאגרמת מעברים מתאימות:

דיאגרמת מעברים:



טבלת מעברים:

	0	1
s_0	$s_1,0$	$s_0,0$
s_1	$s_2,1$	$s_0,1$
s_2	$s_0,0$	$s_3,1$
s_3	$s_1,1$	$s_2,0$

בטבלה: בעמודה-i, קלט i.

אי-שוויון ערכים עצמיים: $\left\|A^k x(k)\right\|\le\left|\lambda_{\max}\right|^k\cdot\left|x(k)\right|$

חומר תיאורטי

משפט קיום ויחידות של משוואה דיפ': למשוואה ליניארית דיפרנציאלית מסדר p מהצורה:

$$\frac{d^p y(t)}{d^p t}+a_{p-1}(t)\frac{d^{p-1}y(t)}{d^{p-1}t}+\dots+a_1(t)\frac{dy(t)}{dt}+a_0(t)y(t)=v(t)$$

עם $v(t)$ פונקציה רציפה נתונה, $t\ge0$ ו- $a_0(t),\dots,a_{p-1}(t)$ פונקציות רציפות נתונות. ותנאי התחלה: $y(0)=y_0,\frac{d}{dt}y(0)=y_1,\dots,\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}y(0)=y_{p-1}$ קיים פיתרון והוא יחיד: $y(t)$, $t\ge0$.

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\frac{d^5 f}{dx^5}(x)=[2\frac{d^3 f}{dx^3}(x)-f(x)]\cdot2x^3+f(x)\cdot v(x)$$

נשתמש במשפט הבא:

נעיין במשוואה $\frac{d^n f(x)}{dx^n}=F\left(\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}},\dots,f(x),x,v(x)\right)$ נניח כי $F(z,x,v)$

מוגדרת היטב בכל נקודה ומקיימת:

1. F רציפה ביחס לכל המשתנים ובעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון ביחס לרכיבי z.

2. קיימות פונקציות רציפות $c_0(x,v),c_1(x,v)$ כך שמתקיים

$$\left\|F(z,x,v)\right\|\le c_0(x,v)+c_1(x,v)\left\|z\right\|$$

תחת תנאים אלו מובטחים קיום ויחידות של פתרון למשוואה הדיפרנציאלית.

במקרה שלנו $z=(z_4,z_3,z_2,z_1,z_0)$ וקטור בעל 5 רכיבים והפונקציה F נתונה ע"י:

$F(z,x,v)=(2z_3-z_0)2x^3+z_0v$ זהו פולינום רב-משתני ולכן הוא מוגדר לכל z,x,v וכן הוא גזיר ברציפות אינסוף פעמים לפי כל אחד מהמשתנים.

משפט: הפתרונות y(t) של משוואה דיפרנציאלית מסדר p מהווים מרחב ווקטורי ממימד p. לכן קיים בסיס של p פתרונות- כל פתרון הומוגני הוא צירוף ליניארי שלהם.

משפט קיום ויחידות: למשוואת הפרשים מסדר p עם p תנאי התחלה: $y(0)=y_0,\dots,y(p-1)=y_{p-1}$ קיים פיתרון יחיד: $y(k)$, $k=1,2,3,\dots$. זה מתקיים גם למשוואות לא הומוגניות.

פיתרון מהשו"ב: משוואת ההפרשים הנתונה היא מסדר-2:

$y(k)-a_1y(k-1)-a_2y(k-2)=0$, ולכן יש לספק את תנאי ההתחלה: $y(0)$, $y(1)$. נתון: $y(0)=b_1,y(2)=b_2$. נחלץ את $y(1)$:

$$y(2)=a_1y(1)+a_2y(0)=b_2\Rightarrow y(1)=\frac{b_2-a_2y(0)}{a_1}=\frac{b_2-a_2b_1}{a_1}$$

כלומר: כאשר מתקיים $y(1)=\frac{b_2-a_2b_1}{a_1}$ וגם $a_1\ne0$, קיים למשוואה פיתרון יחיד.

פיתרון ממבחן: נתונה משוואת הפרשים מסדר-2 עם ת"ה: $y(0)=b_1$, $y(4)=b_2$. כדי להראות שקיים פיתרון יחיד מספיק לוודא שקיימים $y(1),y(2),y(3)$ יחידים שמקיימים את:

$$\begin{cases}y(2)=a_1y(1)+y(0)\\y(3)=a_1y(2)+y(1)\\y(4)=a_1y(3)+y(2)\end{cases}$$

מסדרים משוואות עם 3 נעלמים, ואז מספיק להראות שמטריצת המקדמים-דטרמיננטה שונה מ-0.

הקיום והיחידות ל-k-ים אחרים מובטח מהמשפט בכיתה.

קריטריון לביסוס של פתרונות למשוואת הפרשים הומוגנית:

פתרונות $y^1(k),\dots,y^p(k)$ למשוואת הפרשים הומוגנית מסדר p מהווים בסיס למרחב הפתרונות אם"ם המטריצה pxp שעמודותיה הם תנאי ההתחלה של הפיתרונות האלה היא הפיכה (דטרמיננטה שונה מאפס).

$$\begin{pmatrix}y^{(1)}(0)&\cdots&y^{(1)}(p-1)\\\vdots&&\vdots\\y^{(p)}(0)&\cdots&y^{(p)}(p-1)\end{pmatrix}$$

משפט: קבוצת הפתרונות $y(k)$ של משוואת הפרשים הומוגנית היא מרחב ווקטורי (כל צירוף ליניארי גם פיתרון).