שיטות ספירה בסיסיות

עיקרון החיבור: אם לקבוצה A יש n_1 אפשרויות ולקבוצה B יש n_2 אפשרויות אז מספר האפשרויות לבחירת משהו מ- A **או** משהו מ- B הוא: n_1+n_2.

עיקרון הכפל: כמו קודם רק שאם משהו מ- A נבחר וביחד איתו (ואחריו) נבחר משהו מ- B אז מספר האפשרויות לאחד מ- A **וגם** אחד מ- B הוא: $n_1 \cdot n_2$

סדר \ חזרות	חשוב	לא חשוב
בלי	$P_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{k}$
עם	$PP_n^k = n^k$	$CC_n^k = \dbinom{n+k-1}{k} = C_{k+n-1}^k$

תמורות (P_n) מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים $P_n = n!$.

חליפות: (P_n^k) מספר האפשרויות לבחור k אלמנטים מתוך n סוגים, הסדר חשוב ובלי חזרות.

דוגמא: הושבת k אנשים על ספסל עם n מקומות, ישנם $n-k$ מקומות ריקים ולכן מחלקים בסידור הפנימי ביניהם. $P_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

צירופים: (C_n^k) מספר האפשרויות לבחור k אלמנטים מתוך n סוגים, הסדר לא חשוב ובלי חזרות.

דוגמא: בוחרים כאשר הסדר לא חשוב, ומכפילים ב-$k!$ לקבלת החשיבות לסדר.

$$C_n^k \cdot k! = P_n^k \Rightarrow C_n^k = P_n^k / k! = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

דוגמא: מספר המילים הבינאריות עם k אחדים ו $n-k$ אפסים, כאשר הסדר בין האחדים ובין האפסים אינו משנה ולכן מחלקים בו.

הרחבה: k_1 כדורים עם צבע-1, k_2 כדורים עם צבע-2, ..., k_t כדורים עם צבע t. מספר האפשרויות לסדרם בשורה, וממנו נצמצם את האפשרויות: $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_t!}$ כלומר: $\dfrac{\left(\sum k_i\right)!}{\Pi k_i!}$

בחירות עם חזרות:

(PP_n^k) בחירת k אלמנטים מתוך n סוגים, עם חזרות וסדר חשוב.

©ענת עציון

דוגמא: בטוטו בוחרים תוצאה לכל אחת מ16 שורות. בכל שורה בוחרים מתוך 3 תוצאות: ניצחון א, ניצחון ב ותיקו, ולכן: $PP_{16}^{3}=3^{16}$

(CC_n^k) בחירת k אלמנטים מתוך n סוגים עם חזרות וסדר לא חשוב.

דוגמא: מספר הפתרונות ל: $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$, כאשר x_i - מספר הפעמים שבחרנו את האלמנט ה-i.

דוגמא: חלוקת k כדורים זהים ל-n תאים בשורה (לתאים יש סדר ביניהם, לכדורים אין).

עיקרון שובך היונים

אם ב-n שובכי יונים יש $n+1$ יונים אז באחד מהשובכים יש לפחות 2 יונים.

עיקרון מורחב: אם מחלקים k כדורים ל-n תאים, אז קיים תא שבו יש יותר מ $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil$ כדורים (כלומר, יותר מהממוצע- ערך שלם עליון).

דוגמאות:

- לכל בחירה של 13 סטודנטים, לפחות 2 יחגגו יומולדת באותו החודש.
- בקורס יהיה סטודנט אחד לפחות שיקבל ציון סופי שאינו נמוך מהממוצע.
- נתונות 6 נקודות במישור ונחבר כל זוג נקודות בקשת. נתונים שני צבעים ונצבע כל קשת בצבע אחד. אז בהכרח קיים משולש מונוכרומאטי.

©ענת עציון

הבינום של ניוטון

נוסחה בסיסית: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ **צורה נוספת:** $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

תכונות משולש פסקל:

1. שפת המשולש מורכבת מ-1 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
2. "ליד השפה" (באלכסון של-$k=1$) רשום מספר השורה ה-n $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
3. סימטריה $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
4. זהות פסקל: כל איבר שווה לסכום אלה שמעליו $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$
5. סכום השורה ה n הוא: 2^n $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
6. בשורה: סכום אלו במקומות הזוגיים שווה לסכום אלו במקומות האי-זוגיים
$$\sum_{k\ odd}\binom{n}{k}=\sum_{k\ even}\binom{n}{k}=2^{n-1}$$
7. תכונת "מקל הגולף"/ תכונת "הגרב": סכום איברים באלכסון שווה לאיבר בשורה מתחת בכיוון הפוך לאלכסון $\sum_{t=0}^{k}\binom{n+t}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$

דוגמא: $\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}=\binom{5}{2}$

סריג פסקל:

התכונה היסודית: לצומת (n,k) יש $\binom{n}{k}$ מסלולים שונים (שיבוץ k צעדים ימינה בתוך כל הצעדים).

הרחבות:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum\binom{n}{i_1 i_2\cdots i_t}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_t^{i_t}$$ $$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

©ענת עציון

אינדוקציה ורקורסיה

<u>עיקרון האינדוקציה:</u>

תהי P_n תכונה כלשהי שהיא פונקציה של המספר הטבעי n. אם:

1. <u>בסיס האינדוקציה:</u> P_0 מתקיים
2. <u>צעד האינדוקציה:</u> לכל $k>0$, אם P_{k-1} נכון אז p_k נכון.

אז: P_n נכון לכל n.

<u>אקסיומת האינדוקציה המתמטית:</u> תהי S קבוצה לא ריקה של טבעיים, אז יש ב- S מינימום.

<u>עיקרון האינדוקציה הכפולה:</u>

תהי $P_{m,n}$ תכונה כלשהי של $(m,n)\in N\times N$. אם:

1. <u>בסיס האינדוקציה:</u> $P_{0,k}$ נכון וגם $P_{k,0}$ נכון.
2. <u>צעד האינדוקציה:</u> נכונות $P_{s,t}$ לכל $(s,t)\prec(m,n)$ גוררת נכונות $P_{m,n}$.

אז: P נכונה לכל איבר ב $N\times N$

<u>הערה:</u> אם $a_1\le a_2$ וגם $b_1\le b_2$ אז נאמר: $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$

	רקורסיה	נוסחה סגורה
סדרה חשבונית	$step:\ a_n=a_{n-1}+d$ $base:\ a_1$	$a_n=a_1+(n-1)d$
סדרה הנדסית	$step:\ a_n=a_{n-1}\cdot q$ $base: a_1$	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$
סדרת פיבונאצ'י	$step:\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $base:\ a_0=a_1=1$	$complicated$
P_n	$step:\ P_n=n\cdot P_{n-1}$ $base:\ P_0=1$	$P_n=n!$
P_n^k	$step:\ P_n^k=n\cdot P_{n-1}^{k-1}$ $base:\ P_n^0=1,\ P_n^n=n!$	$P_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$
PP_n^k	$step:\ PP_n^k=n\cdot PP_n^{k-1}$ $base:\ PP_n^0=1$	$PP_n^k=n^k$
C_n^k	$step:\ C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$ $base:\ C_n^0=1,\ C_0^k=$	$C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
CC_n^k	$step:\ CC_n^k=CC_{n-1}^k+CC_n^{k-1}$ $base: 1^{st}\ line\ \&\ row$	$CC_n^k=\dbinom{n+k-1}{k}$

©ענת עציון

<u>D-arrangements:</u> D_n , מספר התמורות של $1,2,\ldots,n$ כך שאף i לא ישב במקום ה i.

$$\boxed{step: D_n=(n-1)\left(D_{n-2}+D_{n-1}\right)\quad base: D_0=1,\ D_1=0}$$

<u>הסבר לצעד:</u> למקום הראשון ישנן $(n-1)$ אפשרויות להצבה (כולם מלבד-1). מסתכלים על האיבר שבמקור ישב במקום ה-k. לאחר ששמנו אותו במקום הראשון ישנן שתי אפשרויות:

1. האיבר הראשון עבר למקום ה-k, ואז נותרו $n-2$ מקומות להחיל עליהם את אותו התהליך ולכן זהו: D_{n-2}.
2. האיבר הראשון לא עבר למקום ה-k, ולכן נותרו $n-1$ איברים ו-$n-1$ מקומות כאשר לכל איבר יש מקום אחד שאסור עליו לשבת בו (לאיבר הראשון אסור לשבת במקום ה-k כי אחרת זו אפשרות 1). נחיל עליהם את אותו התהליך וזהו: D_{n-1}

נחברם לפי עיקרון החיבור ונכפיל בהושבת האיבר k במקום הראשון לפי עיקרון הכפל.

©ענת עציון

כלל ההכלה וההפרדה

הכלל:

n אלמנטים, $p_1, p_2, \dots p_t$ - תכונות, $w(p_i)$ - מספר האלמנטים בעלי תכונה p_i

$w(p_i, p_j)$ - מספר האלמנטים בעלי תכונות p_i ו- p_j , $w(0) = n$,

$$w(r) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \cdots i_r \le t} w(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$$

מטרה: ספירת האיברים שלא מקיימים אף תכונה:

נהוג להגדיר "תכונות רעות" ולמצוא את מספר האיברים שלא מקיימים אף אחת מהן.

$$\boxed{w(p_1', p_2', \dots, p_t') = w(0) - w(1) + w(2) \cdots = \sum_{r=0}^{t} (-1)^r w(r)}$$

משפט מורחב:

$E(m)$ - מספר האיברים המקיימים בדיוק m תכונות רעות. $\boxed{E(m) = \sum_{r=m}^{t} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} w(r)}$

הערה: $w(p_1', p_2', \dots, p_t') = E(0)$ וגם מתאים ל: $\boxed{E(0) = \sum_{r=0}^{t} (-1)^r w(r)}$

D-arrangements: p_i - בפרמוטציה, i יושב במקום ה- i

$$w(0) = n!$$

$$w(1) = w(p_1) + \cdots + w(p_n)$$

$$(n-1)! + \cdots + (n-1)! = n \cdot (n-1)!$$

$$w(2) = (n-2)! + \cdots + (n-2)! = \binom{n}{2} (n-2)!$$

$$w(r) = \binom{n}{r} (n-r)! = \frac{n!}{r!\,\cancel{(n-r)!}} \cancel{(n-r)!} \qquad \boxed{w(r) = \frac{n!}{r!}}$$

$$\boxed{D_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{r!} = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} \approx n! e^{-1}}$$

©ענת עציון

חלוקות

בעיות על חלוקת כדורים לתאים:

בעיות חלוקה בסיסיות:

1. n כדורים <u>זהים</u>, k תאים <u>שונים</u>, בכל תא לכל היותר כדור אחד.

בחירת n תאים מתוך k, בלי חזרות וסדר לא חשוב: $C_k^n = \binom{k}{n}$

2. n כדורים <u>שונים</u>, k תאים <u>שונים</u>, בכל תא לכל היותר כדור אחד.

בחירת n תאים מתוך k, בלי חזרות וסדר כן חשוב: $P_k^n = \frac{k!}{(k-n)!}$

3. n כדורים <u>שונים</u>, k תאים <u>שונים</u>, אין מגבלה על גודל התא.

בחירת n תאים מתוך k, עם חזרות וסדר כן חשוב: $PP_k^n = k^n$

4. n כדורים <u>זהים</u>, k תאים <u>שונים</u>, אין מגבלה על גודל התא.

בחירת n תאים מתוך k, עם חזרות וסדר לא חשוב: $CC_k^n = \binom{k+n-1}{n}$

בעיות חלוקה נוספות:

5. n כדורים <u>שונים</u>, k תאים <u>שונים</u>, סדר הכדורים בתא חשוב.

כמו שיבוץ n כדורים שונים ביחד עם $k-1$ מחיצות זהות של תאים $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$

6. m_1 כדורים שונים בתא-1, ... , m_{k-1} כדורים שונים בתא $k-1$, השאר בתא ה k.

<u>מקדם מולטינומי-</u> $\boxed{\binom{n}{m_1 m_2 \cdots m_{k-1}} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_{k-1}! (n-m_1-m_2-\cdots-m_{k-1})!}}$

בעיות עם פתרונות רקורסיביים:

7. $T(n,k)$- n כדורים <u>שונים</u>, k תאים <u>שונים</u>, אין תאים ריקים.

<u>כלל ההכלה וההפרדה:</u> p_i - התא ה-i ריק. $w(0)=k^n,\ \ T(n,k)=w(p_1',p_2',\dots,p_k')$

לפי הנוסחה- $w(p_1',p_2',\dots,p_k') = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r w(r)$. אז נציב עבור תרגיל זה:

$w(r) = \binom{k}{r}(k-r)^n$ ונקבל: $T(n,k) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}(k-r)^n$

<u>פיתרון רקורסיבי:</u> $\boxed{T(n,k) = k\cdot\left(T(n-1,k-1)+T(n-1,k)\right)}$

בסיס: $T(0,k)=T(k,0)=0,\ \ T(0,0)=1$

©ענת עציון

8. $S(n,k)$ - סטרלינג מסדר שני. n כדורים <u>שונים</u>, k תאים <u>זהים</u>, אין תאים ריקים.

<u>דרך א:</u> כי כל ההבדל ביניהם הוא בכך שעכשיו התאים זהים. $S(n,k)=\frac{1}{k!}T(n,k)$

<u>פיתרון רקורסיבי:</u> $\boxed{S(n,k)=\left(S(n-1,k-1)+S(n-1,k)\right)\cdot k}$

9. $Q(n)$ - n כדורים <u>שונים</u>, מספר תאים <u>שונים</u> ולא ריקים כרצונך.

<u>דרך א:</u> בכל פעם k יהיה מספר התאים הלא ריקים שבחרנו $Q(n)=\sum_{k=1}^{n}T(n,k)$

<u>פיתרון רקורסיבי:</u> $\boxed{Q(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}Q(i)}$ כאשר i - מספר הכדורים <u>שלא</u> בתא <u>הראשון</u>.

בסיס: $Q(0)=1$.

10. $R(n)$ - n כדורים <u>שונים</u>, מספר תאים <u>זהים</u> ולא ריקים כרצונך.

<u>דרך א:</u> בכל פעם k יהיה מספר התאים הלא ריקים שבחרנו $R(n)=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)$

<u>פיתרון רקורסיבי:</u> $\boxed{R(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}R(i)}$ כאשר i - מספר הכדורים שלא ביחד עם הכדור הראשון. בסיס: $R(0)=1$.

©ענת עציון

פונקציות יוצרות

הגדרה: פונקציה יוצרת של סדרת מספרים $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ היא טור חזקות "פורמאלי":

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

דוגמאות לסדרות והפונקציות היוצרות שלהן:

- סדרת המקדמים הבינומיים: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \cdots + \binom{n}{n} x^n = \boxed{(1+x)^n}$$

- $1,1,1,\ldots$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \boxed{\frac{1}{1-x}}$ (סכום של סדרה הנדסית אינסופית).

- גזירה לפי x: $\boxed{\frac{1}{(1-x)^2}} = \cdots + f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$, סדרה: $(1,2,3,\ldots)$.

- גזירה נוספת: $\boxed{\frac{2}{(1-x)^3}} = \cdots + f''(x) = 2 + 6x + \cdots + (n+2)(n+1)x^n$, סדרה: $(2,6,\ldots)$.

זהויות ונוסחאות שימושיות:

- מספר הפתרונות (בשלמים) של משוואה: $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = k$ הוא: $\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$

- $$f(x) = (1+x+x^2+\cdots)^n = \underbrace{(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)}_{n\ times} = \frac{1}{(1-x)^n}$$

המקדם של x^k הוא בדיוק מספר הפתרונות של המשוואה: $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = k$. שזה- $\binom{n+k-1}{k}$ ולכן:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}}$$

- הצבת x^m בנוסחה תיתן: $\boxed{\frac{1}{(1-x^m)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{m \cdot k}}$

©ענת עציון

- <u>סדרת סכומים חלקיים:</u> תהי $\{b_n\}$ סדרה, $B(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. תהי $\{a_n\}$ סדרת הסכומים החלקיים שלה: $a_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ ו- $A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. אז:

$$\boxed{A(x) = \frac{B(x)}{1-x}}$$

  - <u>הערה:</u> דרך נוספת להגדרת סדרת סכומים חלקיים:

$$b_n = a_n - a_{n-1} \Rightarrow a_n = b_n + a_{n-1} \Rightarrow a_n = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_0$$

- <u>פונקציה יוצרת לסדרת החלוקות של מספר:</u>

$$P(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right)\left(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots\right) =$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x^3)} \cdots \frac{1}{(1-x^i)}}$$

- <u>הכפלת טורי חזקות:</u>

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n} \quad \boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n},$$

<u>דוגמא לפיתרון משוואה עם אילוצים:</u>

כמה פתרונות טבעיים יש ל: $t_1 + t_2 + t_3 = 30$ כאשר t_1, t_3 אי-זוגיים, t_2 זוגי וגם: $t_1 \ge 1,\ t_2 \ge 4,\ t_3 \ge 7$.

כדי לשמור על זוגיות, נכלול בגורם המתאים רק איברים בעלי חזקה זוגית או אי-זוגית.

כדי לשמור על האי-שוויון, נכלול בגורם המתאים רק איברים בעלי חזקה שווה/גדולה למספר.

$$f(x) = \underbrace{\left(x + x^3 + x^5 + \cdots\right)}_{t_1}\underbrace{\left(x^4 + x^6 + x^8 + \cdots\right)}_{t_2}\underbrace{\left(x^7 + x^9 + x^{11} + \cdots\right)}_{t_3} =$$

$$x \cdot x^4 \cdot x^7 \left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right)^3 = x^{12} \cdot \frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}$$

ע"י שימוש בנוסחה: $\frac{1}{\left(1-x^m\right)^n}$ נקבל: $= x^{12} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{k}x^{2k}$ והגורם x^{30} מתקבל כאשר $k = 9$,

והמקדם הוא: $\binom{11}{9}$ שזהו גם מספר הפתרונות למשוואה.

<u>הערה:</u> אם טור חזקות מתחיל מאינדקס הגבוה מ-0 זה פשוט אומר שזה יהיה נכון לכל n החל ממספר זה ולא החל מ-0.

©ענת עציון

מסלולים בגרפים

גרפים לא מכוונים:

גרף סופי: קבוצת הקשתות וקבוצת הצמתים, שתיהן קבוצות סופיות.

קשתות מקבילות: שתי קשתות בין אותם שני צמתים.

חוג עצמי: קשת מצומת לעצמו.

דרגת צומת: $d(v)$ מספר נקודות הקצה של קשתות בצומת זה.

סכום דרגות: $\boxed{\sum d(v) = 2|E|}$ סכום הדרגות בגרף סופי שווה לפעמיים מספר הקשתות.

זוגיות דרגות: $2|E|$ הוא מספר זוגי ולכן $\sum d(v)$ - סכום הדרגות הוא זוגי.

למה 1.1: מספר הצמתים עם דרגה אי-זוגית הוא זוגי.

מסלול: סדרת צמתים וקשתות מהצורה הבאה: $v_0 \frac{e_1}{\quad} v_1 \frac{e_2}{\quad} v_2 \cdots v_{l-1} \frac{e_l}{\quad} v_l$

מסלול פשוט: לא מבקרים באף צומת פעמיים.

מעגל פשוט: רק צומת ההתחלה-סיום מופיעה פעמיים.

מסלול המילטון: מסלול פשוט שעובר בכל צומת בגרף בדיוק פעם אחת.

חתך: תת-קבוצה של צמתים בגרף. חתך ריק- אין קשתות בינו לבין שאר הגרף.

גרפים קשירים: בין כל זוג צמתים בגרף קיים מסלול.

הגדרה נוספת: גרף קשיר אם"ם בכל חתך לא ריק יש לפחות קשת אחת.

גרף פשוט: גרף לא מכוון שאין בו חוגים עצמיים ואין בו קשתות מקבילות

בגרף פשוט: $|E| \leq \binom{|v|}{2}$

©ענת עציון

גרפים מכוונים:

קשתות מקבילות ואנטי-מקבילות: מקבילות הן באותו כיוון ואנטי-מקבילות הן בכיוונים מנוגדים בין אותם שני צמתים.

דרגת יציאה: מספר הפעמים שקשתות שיוצאות מן הצומת.

דרגת כניסה: מספר הפעמים שקשתות נכנסות לצומת.

סכום דרגות: $\boxed{\sum d_{out}(v) = \sum d_{in}(v) = |E|}$

גרף קשיר היטב: בין כל זוג צמתים יש מסלול בשני הכיוונים (וצומת תמיד יכול להגיע לעצמו).

גרף תשתית: הגרף הלא מכוון המתקבל מ"מחיקת הכיוונים".

- לגרף לא קשיר היטב יכול להיות גרף תשתית קשיר.

ייצוג מטריצי של גרף:

מטריצת שכנויות: גרף $G=(V,E)$ עם $|V|=n$ ייוצג ע"י המטריצה הריבועית $A_{n\times n}=\left(a_{i,j}\right)$ עבורה בכניסה $a_{i,j}$ יש את מספר הקשתות מצומת i לצומת j. עבור גרף לא מכוון מתייחסים לכל קשת כאל מכוונת בשני הכיוונים (לולאה עצמית בכיוון אחד בלבד) ולפיכך מקבלים מטריצה סימטרית.

הערה: בגרף לא קשיר מטריצת השכנויות מורכבת מבלוקים. כל בלוק הוא רכיב קשיר אחר.

©ענת עציון

מסלולים אויילריים

מסלול אויילר: מסלול בגרף סופי לא מכוון המבקר בכל קשת פעם אחת ומכסה את כל צמתי הגרף (וכל קשתות הגרף).

גרף אויילר: גרף שיש בו מסלול אויילר.

משפט 1.1 (אויילר): יהי $G=(V,E)$ גרף סופי, קשיר ולא מכוון. G הוא אויילרי אם"ם מספר הצמתים שדרגתם אי-זוגית הוא 0 או 2.

- 0- המסלול הוא מעגל
- 2- המסלול איננו מעגל (כי צמתים באמצע המסלול, דרגתם בהכרח זוגית ולכן שני צמתים אלה יהיו הקצוות של המסלול).

מסלול אויילרי מכוון: מסלול מכוון שעובר בכל קשת פעם אחת.

משפט 1.2: יהיה G גרף מכוון שגרף התשתית שלו קשיר. אז G הוא אויילרי אם מתקיים אחד מ:

1. לכל צומת, דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה- אויילרי מעגלי.
2. קיימים שני צמתים s ו-t עבורם: $\begin{matrix} d_{out}(s)=d_{in}(s)+1 \\ d_{in}(t)=d_{out}(t)+1 \end{matrix}$ ולכל צומת אחר: $d_{in}(v)=d_{out}(v)$.

©ענת עציון

גרפי דה-בروאין

גרף דה-ברואין: עבור א"ב $\sum=\{0,1,2,\ldots,\sigma-1\}$ הגרף $G_{\sigma,n}$ מוגדר:

1. הצמתים: $V=\sum^{n-1}$: קבוצת כל המילים σ^{n-1} באורך $n-1$ מעל א"ב של $\sum$.

2. הקשתות: $E=\sum^{n}$: קבוצת כל המילים σ^{n} באורך n מעל א"ב של $\sum$.

3. הקשת $b_1b_2\ldots b_n$ מתחילה בצומת: $b_1b_2\ldots b_{n-1}$ ומסתיימת בצומת: $b_2b_3\ldots b_n$.

הערה: לכל צומת $v\in V$: $d_{in}(v)=d_{out}(v)=\sigma$.

משפט 1.3: לכל שני מספרים חיוביים σ ו- n, ב- $G_{\sigma,n}$ קיים מעגל אוילר.

הוכחה: לפי דרגות כניסה ויציאה זהות וקשירות היטב של הגרף.

סדרת דה-ברואין: בהינתן א"ב $\sum=\{0,1,2,\ldots,\sigma-1\}$ ו- n, אז הסדרה: $a_0a_1a_2\ldots a_{l-1}$ מעל א"ב $\sum$ נקראת: σ,n דה-ברואין אם לכל מילה $w\in\sum^n$ קיים i כך ש- $a_ia_{i+1}\ldots a_{i-n-1}=w$ כאשר האינדקסים הינם מודולו l (כלומר- זהו מעגל ציקלי).

הגדרה נוספת: סדרה באורך σ^n המכילה באופן ציקלי את כל המילים באורך n מעל הא"ב $\{0,1,\ldots,\sigma-1\}$

מסקנה: לכל σ,n קיימת סדרת דה-ברואין באורך: σ^n: ניתן להרכיבה ע"י מציאת מעגל אוילר ב- $G_{\sigma,n}$.

©ענת עציון

הגדרות עצים

משפט 2.1: יהי $G=(V,E)$ גרף סופי לא מכוון, סופי או אינסופי, התנאים הבאים שקולים:

1. G הוא עץ
2. G חסר מעגלים אבל כל קשת שנוסיף תיצור מעגל.
3. G לא מכיל לולאות עצמיות ולכל שני צמתים יש מסלול יחיד המחבר אותם.
4. G קשיר מינימאלי- כל קשת שנוציא תהפכו ל-לא קשיר.

עץ סופי: גרף סופי שהוא עץ.

יער: גרף חסר מעגלים (למשל- כמה עצים, כי כל רכיב קשיר ביער הינו קשיר וחסר מעגלים -> עץ).

עלה: צומת שדרגתו היא:1.

טענת היער והעלים: ביער סופי עם קשת אחת לפחות, יש לפחות 2 עלים.

משפט 2.2: יהי $G=(V,E)$ גרף סופי לא מכוון ו $|V|=n$. התנאים הבאים שקולים:

1. G הוא עץ.
2. G חסר מעגלים ויש לו $n-1$ קשתות.
3. G קשיר ויש לו $n-1$ קשתות.

עץ פורש: תהי $V=\{1,2,\dots,n\}$ קבוצת צמתים. אם $G=(V,E)$ (לא מכוון) הוא עץ אז נאמר כי: "G פורש את V".

משפט-2.4- משפט קיילי לספירת עצים: מספר העצים הפורשים עבור $n>1$ צמתים שונים הוא: $\boxed{n^{n-2}}$ נראה העתקה חח"ע ועל מקבוצת העצים הפורשים מעל n צמתים שונים המסומנים $\{1,2,\dots,n\}$ לאוסף מילים באורך $n-2$ מעל א"ב בן n אותיות.

עץ פורש ← מילה: נתון עץ $G=(V,E)$ בעל n צמתים. נבנה ממנו מילה $w_1w_2\dots w_{n-2}$.

אלגוריתם: עבור $i=1$ עד $n-2$:

יהיה j העלה בעל המספר הנמוך ביותר בעץ. הוצא את j מהעץ.

קבע $w_i=k$ כאשר k הינו השכן של j בעץ.

מילה ← עץ פורש: נתונה מילה $w=w_1w_2\dots w_{n-2}$. נשחזר ממנה את העץ המקורי.

אלגוריתם: (מספר ההופעות של v ב- w) +1 ← $d(v)$.

עבור $i=1$ עד $n-2$:

יהיה j מינימאלי בעל $d(j)=1$. בנה קשת j←w_i , 0 $d(j)$, $d(w_i)--$.

בנה קשת מינימאלית בין שני צמתים בעלי דרגה 1.

©ענת עציון

שורש: צומת שניתן להגיע ממנו לכל הצמתים.

עץ מכוון: גרף מכוון שגרף התשתית שלו הוא עץ ויש לו שורש.

משפט 2.5- שקילות הגדרות עצים מכוונים: הטענות הבאות שקולות:

1. G הוא עץ מכוון.
2. ל-G יש שורש r שממנו אפשר להגיע באופן יחיד במסלול מכוון לכל צומת.
3. ל-G יש שורש r עבורו: $d_{in}(r)=0$ ולכל צומת אחר: $d_{in}(v)=1$.
4. ל-G יש שורש r והורדת קשת אחת תקלקל את הגדרת השורש של r.
5. גרף התשתית של G קשיר וקיים צומת אחד r עבורו: $d_{in}(r)=0$ ולשאר: $d_{in}(v)=1$.

משפט 2.6: יהי G גרף מכוון וסופי. G הוא עץ עם שורש r אם"ם:

1. מתקיים "תנאי הדרגות": $d_{in}(r)=0$, $d_{in}(v)=1$
2. גרף התשתית חסר מעגלים.

גרפים מתווכים

הגדרה: a הוא המתווך של b ו-c בגרף G אם:

- a אב קדמון של b.
- a אב קדמון של c.

גרף מתווך: גרף מכוון (סופי או אינסופי) שבו לכל שני צמתים בגרף קיים מתווך, כלומר: לכל שני צמתים u,v קיים צומת w כך שקיימים מסלולים מכוונים מ-w ל-u ול-v.

משפט 2.7 (למת המתווך): אם גרף מכוון וסופי G הוא מתווך אז יש לגרף יש שורש (=מתווך).

©ענת עציון

עצים פורשים

יהי $G(V,E)$ גרף.

$V'\subseteq V$, **הגרף המושרה-צמתים** ע"י הצמתים של V' מכיל את כל הקשתות ששני קצותיהן נוגעות בצמתי V'.

$E'\subseteq E$, **הגרף המושרה-קשתות** ע"י הקשתות של E' מכיל את כל הצמתים שיש להם קשת נוגעת מ- E'.

עץ פורש: גרף מושרה קשתות שמקיים: 1. עץ. 2. נוגע בכל הצמתים.

למה: לכל גרף מכוון G (סופי או אינסופי) עם שורש r יש עץ פורש עם שורש r

למת האינסוף של konig: אם G גרף אינסופי עם שורש r ולכל צומת דרגת יציאה סופית, אז יש מסלול אינסופי המתחיל ב r.

משפט הריצוף של Wang: ישנו מספר סופי של סוגי מרצפות ומכל סוג מספר אינסופי. אסור לסובב, לשקף או להפוך את המרצפות. האם בהינתן מישור מסוים, ניתן לרצף אותו? לפי המשפט- אם אפשר לרצף את הרביע הראשון אז אפשר לרצף את כל המישור.

מטריצת דרגות הכניסה: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. בלי הגבלת הכלליות נמספר את הצמתים $V=\{1,2,\dots,n\}$. נגדיר את המטריצה כדלקמן: $D(i,j)=\begin{cases} d_{in}(i) & i=j \\ -k & i\neq j \end{cases}$

- k הוא מספר הקשתות מ: i ל: j.

אבחנות:

א. סכום אברי כל עמודה הוא אפס. ולכן סכום כל השורות במטריצה הוא אפס.
ב. המטריצה סינגולארית- הדטרמיננטה שלה שווה אפס.

למה 2.1: יהי G גרף מכוון סופי ללא חוגים עצמיים. G הוא עץ מכוון עם שורש r אם"ם:

1. $D(i,j)=\begin{cases} 0 & i=r \\ 1 & i\neq r \end{cases}$ (זהו למעשה "תנאי הדרגות").
2. דטרמיננט המינור המתקבל מהשמטת השורה והעמודה ה r הוא:1.

©ענת עציון

משפט 2.9 (קירכהוף לגרפים מכוונים): יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון ללא לולאות עצמיות. מספר העצים הפורשים המכוונים עם שורש r של G שווה לדטרמיננטה של המינור אשר מתקבל ממטריצת דרגות הכניסה של הגרף באמצעות מחיקה של השורה והעמודה ה- r.

סימון: $T(r,G)$ - קבוצת העצים הפורשים של G ש- r הוא שורשם. $\boxed{|T(r,G)|=\det\left(D_{rr}\right)}$

משפט 2.10 (קירכהוף לגרפים לא מכוונים): יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ללא לולאות עצמיות. מספר העצים הפורשים הלא מכוונים של G שווה לדטרמיננטה של המינור המתקבל ממטריצות הדרגות של הגרף באמצעות מחיקה של השורה והעמודה ה- r, לכל $1\le r\le n$.

הערה: ב"מטריצת הדרגות" של גרף לא מכוון, k - מספר הקשתות המחברות את i ו- j.

מסקנה: תהי D מטריצת הדרגות של גרף לא מכוון G. מספר העצים הפורשים של G הוא $D[i,i]\to M_{ii}$ עבור כל צומת i כלשהו.

משפט: מספר העצם הפורשים את k_n - הגרף המלא עם n צמתים, הוא כמו מספר העצים שפורשים את כל הצמתים, ולפי משפט קיילי: $\boxed{n^{n-2}}$

©ענת עציון

קודים פרפיקסיים

א"ב: $\Sigma=\{0,1,2,\ldots,\sigma-1\}$, א"ב בן σ אותיות.

מילה: $w\in\Sigma^*$, רצף של אותיות $w=a_1a_2\ldots a_l,\ a_i\in\Sigma,\ l-length$

קוד: $C=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$, $w_i\in\Sigma^*$, תת-קבוצה של מילים.

הודעה: $M=w_{i_1}w_{i_2}\ldots w_{i_m}$, $w_{i_j}\in C$ - הודעה מתוך קוד.

קוד חד-פענח: קוד שכל הודעה הבנויה ממילים שלו ניתנת לחלוקה למילות הקוד באופן יחיד.

פרפיקס: אומרים שהמילה $a_1a_2\ldots a_n$ היא פרפיקס (רישא) של $b_1b_2\ldots b_m$ אם המילה הראשונה מופיעה כתחילתה של המילה השנייה.

קוד פרפיקסי: קוד בו אין שתי מילים שאחת פרפיקס של השנייה.

דוגמאות: $\{010,01,10\}$ לא פרפיקסי. $\{01,00,11,100,101\}$ - כן פרפיקסי.

טענה: קוד פרפיקסי הוא גם קוד חד-פענח.

עץ σ - מצבי: עץ מכוון שבו לכל צומת יש σ בנים פוטנציאלים ממוספרים: $0,1,2,\ldots,\sigma-1$

x - צומת בעץ, $w(x)$ - המילה המתקבלת מרצף האותיות על הקשתות מהשורש ועד x.

טענה-א: x אב קדמון של y $\leftrightarrow$ $w(x)$ פרפיקס של $w(y)$.

טענה-ב: $x=y \leftarrow w(x)=w(y)$.

תוצאה: הקוד המתאים לקבוצת העלים הוא קוד פרפיקסי.

טענה-ג: לכל קוד פרפיקסי מעל א"ב עם σ אותיות, קיים עץ σ-מצבי, שהעלים שלו מתאימים לקוד זה.

הסכום האופייני: הסכום האופייני $S(T)$ של עץ T מוגדר: $S(T)=\sum_{v-leaf}\sigma^{-l(v)}$

טענה: T עץ σ-מצבי מלא, אז: $S(T)=1$. אם T לא מלא- $S(T)<1$.

תנאי הסכום האופייני: יהי $C=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ צופן פרפיקסי מעל א"ב $\Sigma=\{0,1,2,\ldots,\sigma-1\}$.

ויהי l_i האורך של המילה w_i. אזי מתקיים: $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sigma^{-l_i}\le 1}$

©ענת עציון

משפט: אם מספרים שלמים $l_1, l_2, \dots, l_n$ מקיימים את תנאי הסכום האופייני $\sum_{i=1}^{n} \sigma^{-l_i} \le 1$ אז קיים צופן פרפיקסי $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ מעל א"ב Σ כך שהאורך של w_i הוא l_i.

מספרי קטלן

בעיה-1: מספר המסלולים מ $(0,0)$ ל- (n,n): $\binom{2n}{n}$ (בחירת n אופקיים מתוך $2n$).

בעיה-2: מספר המסלולים מ $(1,-1)$ ל- (n,n): $\binom{2n}{n-1}$ (בחירת $n-1$ קווים אופקיים).

בעיה-3: מסלולים מ $(0,0)$ ל- (n,n) שעוברים מתחת לאלכסון. העתקה חח"ע לבעיה-2.

בעיה-4: מספר המסלולים מ $(0,0)$ ל- (n,n) שלא נוגעים מתחת לאלכסון: בשיטת המשלים-

(בעיה1)-(בעיה3) $\Leftarrow$ $$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

בעיה-5: מספר סדרות סוגריים חוקיות עם n פותחים ו- n סוגרים.

בעיה-6: מספר היערות המסודרים (יער מכוון שצמתיו לא מסומנים) עם n צמתים.

בעיה-7: מספר העצים הבינאריים (2- מצביים) עם n צמתים.

דרך פיתרון-א: מראים העתקה חח"ע לבעיה-4, לדוגמא- כל עליה זה ")" וכל הליכה ימינה זה "(".
כאשר הולכים מעל האלכסון נשמרת חוקיות סדרת הסוגריים כי מספר הפותחים תמיד גדול או שווה למספר הסוגרים ובסוף המסלול מתקיים שיוויון.

דרך פיתרון-ב: רקורסיה- $C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \boxed{C_0 = 1,\ C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}}$ אם הפיתרון הרקורסיבי לבעיה הינו מהצורה הזו, אז הפיתרון הינו מספר קטלן.

©ענת עציון

פתרון נוסחאות נסיגה

שיטת משוואה אופיינית: עבור נוסחת נסיגה $S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2}$ נגדיר את המשוואה האופיינית להיות: $x^2 - ax - b = 0, \quad b \neq 0$.

משפט:

א. אם למשוואה האופיינית שני שורשים שונים r_1, r_2 אז הפיתרון של נוסחת הנסיגה הינו:
$$S_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

ב. אם למשוואה האופיינית שורש אחד r אז $S_n = c_1 r^n + c_2 n r^{n-1}$

כאשר c_1, c_2 הם קבועים המתקבלים ע"י הצבת תנאי ההתחלה S_0, S_1 בפיתרון.

שיטת הצבות חוזרות: מפתחים ביטוי ע"י הצבות חוזרות עד שמגלים את ה"נוסחה":
$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2\left(2a_{n-2} + 1\right) + 1 = 4a_{n-2} + 2 + 1 = a\left(2a_{n-3} + 1\right) + 2 + 1 \\ &= 8a_{n-3} + \left(4 + 2 + 1\right) = \cdots = 2^n a_0 + \left(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1\right) \end{aligned}$$

הגורם הראשון בסכום הינו אפס כי $a_0 = 0$, הגורם השני בסכום זהו טור גיאומטרי ולכן:
$a_n = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$.

החלפת משתנה הרקורסיה: נתונה $f(1) = 0$, $(n \geq 2)$ $f(n) = 2f\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1,$ ונניח ש-n היא חזקה טבעית של 2 (כלומר $n = 2^k$). אז ניתן לכתוב את $f(n)$ באופן הבא:
$f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 1, \quad f(1) = 0$ ואם נסמן: $g(k) \triangleq f(2^k)$ אז נקבל:
$g(k) = 2g(k-1) + 1, \quad g(0) = 0$ וזו כבר נוסחה מוכרת: $g(k) = 2^k - 1$ ואחרי ההצבות המתאימות נקבל: $f(n) = n - 1$.

©ענת עציון