מבוא

טענה: נכונה בעולם.

טיעון: מבנה שמכיל הנחות ומסקנות נאמר שטיעון הוא תקף אם בכל פעם שההנחות נכונות אז גם המסקנות נכונות.

דוגמא למבנה תקף: אם A הוא B וכל B הוא C, אז A הוא C.

דוגמא למבנה לא תקף: אין A ללא B ול-C יש B, אז C הוא A.

מונחי יסוד בתורת הקבוצות:

קבוצה: אוסף של אלמנטים הנקראים איברי הקבוצה. אין חשיבות לסדר ואין משמעות לחזרות.

שייכות: נאמר ש- x הוא איבר של קבוצה A אם x הוא אחד האלמנטים ב- A. סימון: $x \in A$.

הערה: אם b לא איבר ב- A מסמנים: $b \notin A$.

הקבוצה הריקה: הקבוצה בלי איברים, הקבוצה עם 0 איברים. סימון: $\varnothing, \{\}$.

הערה: $\{\varnothing\}$ אינה קבוצה ריקה, זו קבוצה שמכילה איבר אחד.

שוויון בין קבוצות: נאמר ש- A ו- B קבוצות שוות אם ל- A ול- B יש את אותם איברים.

סימון: $A = B \leftrightarrow$ לכל איבר x, $x \in A$ אמ"ם $x \in B$.

גודל של קבוצה: נאמר ש- A קבוצה סופית אם מספר האיברים בה הוא $n \in \mathbb{N}$.

סימון: $|A|$ - הגודל של A.

תת-קבוצה: A נקראת תת-קבוצה של B אם כל איבר ב- A הוא איבר ב- B.

סימון: $A \subseteq B \leftrightarrow A$ מוכלת ב- B, B מכילה את A, A חלקית ל- B.

$A \not\subset B$ אם קיים $x \in A$ כך ש- $x \notin B$.

הכלה ממש: נאמר ש- A מוכלת ממש ב- B אם $A \subseteq B$ ו- $A \neq B$. סימון: $A \subsetneq B,\ A \subset B$.

הערה: לא לבלבל עם $A \not\subset B$.

תכונות של הכלה:

1. לכל קבוצה A מתקיים: $\varnothing \subseteq A$ (ניתן לטעון שכל אברי הקבוצה הריקה שייכים ל- A).
2. לכל קבוצה A, $A \subseteq A$.
3. אם $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.
4. $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

פעולות על קבוצות:

איחוד קבוצות: האיחוד של הקבוצות A ו- B הוא הקבוצה המסומנת: $A \cup B$ ומוגדרת ע"י:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \ or \ x \in B\}$.

תכונות האיחוד:

1. אם $A \subseteq B$ אז $A \cup B = B$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (האסוציאטיביות של האיחוד).
4. $A \cup A = A$.
5. $A \cup \varnothing = A$.
6. $A \subseteq A \cup B$.

חיתוך קבוצות: קבוצת החיתוך של A ו- B מסומנת: $A \cap B$ ומוגדרת ע"י:
$A \cap B = \{x \mid x \in A \ and \ x \in B\}$.

הערה: אם ל- A ול- B אין איברים משותפים ($A \cap B = \varnothing$) נאמר ש- A ו- B זרות.

תכונות החיתוך:

1. אם $A \subseteq B$ אז $A \cap B = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (האסוציאטיביות של החיתוך).
4. $A \cap A = A$.
5. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. $A \cap B \subseteq A, \ A \cap B \subseteq B$.

הפרש קבוצות: ההפרש בין A ו- B מוגדר ע"י: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ and \ x \notin B\}$, כלומר כל איברי A שאינם איברים ב- B.

סימון: $A \setminus B, \ A - B$.

הפרש סימטרי: $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, כל איברי A שאינם ב- B וכל איברי B שאינם ב- A.

תכונות ההפרש הסימטרי:

1. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
2. $A \oplus B = B \oplus A$.
3. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
4. $A \oplus A = \varnothing$.
5. $A \oplus \varnothing = A$.

קבוצת החזקה: בהינתן קבוצה A, קבוצת החזקה של A מסומנת: $P(A)$ ומוגדרת ע"י:
$P(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$, כלומר קבוצת כל תתי-הקבוצות של A.

טענה: לכל A, B

- מתקיים: $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.
- לא מתקיים: $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$.

בנייה פורמאלית של תורת הקבוצות

1. **הקבוצה הריקה:** קיימת קבוצה ריקה. סימון: $\varnothing$. הקבוצה הריקה היא יחידה.
2. **קבוצות של שני איברים:** לכל שתי קבוצות A ו- B קיימת קבוצה C ש- A ו- B הם האיברים היחידים שלה $C=\{A,B\}$ (C זוג לא סדור).
3. **איחודים:** לכל שתי קבוצות A ו- B קיימת קבוצה C עבורה: $x\in C$ אם"ם $x\in A$ או $x\in B$. סימון: $C=A\cup B$.
4. **עיקרון ההפרדה/החלוקה:** בהינתן שקיימת קבוצה A, ניתן להגדיר תכונה של איברי A וקיימת קבוצה $A \subseteq B$ שמכילה בדיוק את כל אברי A שמקיימים את התכונה.
5. **כלל החזקה:** לכל קבוצה A קיימת הקבוצה: $P(A)$.

זוג סדור: זוג איברים עם סדר ביניהם. סימון: (a,b), $<a,b>$.

ההבדל בין זוג סדור לשני איברים בקבוצה:

- בקבוצה אין סדר ואין חזרות.
- $<a,a>$=זוג, $\{a,a\}$=קבוצה של איבר אחד.
- $\{a,b\}=\{b,a\}$, $<a,b>\neq<b,a>$.

הערה: באותו אופן ניתן להגדיר שלשה סדורה: $<a,b,c>$.

מכפלה קרטזית: בהינתן שתי קבוצות A ו- B, המכפלה הקרטזית של A ב- B מסומנת: $A\times B$ ומוגדרת ע"י: $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$ כלומר: אוסף כל הזוגות הסדורים שהאיבר הראשון הוא מ- A והשני הוא מ- B.

עבור קבוצות סופיות:

- $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.
- $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$.

מכפלה של קבוצה עם עצמה: $A\times A=A^2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ $A=\{0,1\}$.

תכונות של מכפלה קרטזית:

1. $\varnothing=A\times\varnothing=\varnothing\times A$.
2. $A\times B=\varnothing \leftrightarrow A=\varnothing$ או $B=\varnothing$ (או שניהם).
3. $B \subseteq A$ אזי לכל קבוצה C, $A\times C\subseteq B\times C$.
4. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.
5. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.
6. $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

רלציות

הגדרות:

רלציה בינארית: רלציה בין A ל- B היא תת-קבוצה כלשהי של $A \times B$.

רלציה טרינארית: רלציה בין A, B ו- C היא תת-קבוצה כלשהי של $A \times B \times C$.

רלציה אונארית: תת-קבוצה כלשהי של A.

הערה: מספר הרלציות בין A ל- B שקול לשאלה כמה תתי-קבוצות יש ל- $A \times B$: $2^{|A\times B|} = 2^{|A|\cdot|B|}$.

תחום וטווח של רלציה: תהי $R \subseteq A \times B$ רלציה בינארית בין A ל- B.

$Domain(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B,\ (x,y) \in R\}$ (כל אברי A שמהם יוצאות קשתות בגרף).

$Range(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ (x,y) \in R\}$ (כל אברי B שאליהם נכנסת לפחות קשת אחת).

רלציה הופכית: בהינתן רלציה $R \subseteq A \times B$, מגדירים רלציה הופכית ל- R המסומנת: R^{-1}, $R^{-1} \subseteq B \times A$ באופן הבא: $aRb \leftrightarrow bR^{-1}a$.

בגרף: הופכים את כיווני הקשתות.

במטריצה: אם M מייצגת את R אז M^t מייצגת את R^{-1}.

רלציה משלימה: בהינתן $R \subseteq A \times B$, $R^c = A \times B \setminus R$.

במטריצה: הופכים 0 ל-1 ו1 ל-0.

הרכבת רלציות: בהינתן $R \subseteq A \times B$ ו- $S \subseteq B \times C$, מגדירים: $R \circ S \subseteq A \times C$ באופן הבא:

$R \circ S = \{(a,c) \mid \exists b \in B,\ (a,b) \in R \ \ and \ \ (b,c) \in S\}$ כלומר, אוסף כל הזוגות שעבורם יש מסלול מ- A ל- C.

הערה: ייתכן שההרכבה תהיה ריקה למרות שהרלציות לא ריקות.

תכונות של הרכבת רלציות:

- אסוציאטיביות: $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$.
- הופכי של הרכבה: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

הערה: אם מוגדרת $R \circ S$, לא בהכרח מוגדרת $S \circ R$.

רלציות מעל קבוצה: רלציה בינארית מעל A היא תת-קבוצה כלשהי של $A \times A$.

חזקות של רלציה: כאשר מדברים על R שמוגדרת מעל A מסמנים את $R \circ R$ ב- R^2.

רלציות בעלות תכונות מיוחדות:

מתייחס לרלציה R מעל קבוצה A,

רפלקסיביות:

- רלציה רפלקסיבית: לכל $x \in A$, $(x,x) \in R$.

  בגרף: לכל הצמתים יש לולאות עצמיות.

  במטריצה: אלכסון של 1-ים.

- רלציה לא רפלקסיבית: קיים $x \in A$ ו- $(x,x) \notin R$.

- **רלציה אי-רפלקסיבית:** לכל $x \in A$, $(x,x) \notin R$.

סימטריות:

- **רלציה סימטרית:** לכל $(x,y) \in A$, $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$.
- **רלציה לא סימטרית:** קיים $(x,y) \in A$, $(x,y) \in R$ וגם $(y,x) \notin R$.
- **רלציה אסימטרית:** לכל $x,y \in A$, $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \notin R$.
- **רלציה אנטי סימטרית:** לכל $x,y \in A$, אם $(x,y) \in R$ וגם $(y,x) \in R$ אז: $x = y$.

טרנזיטיביות:

- **רלציה טרנזיטיבית:** לכל $x,y,z \in A$, אם $(x,y) \in R$ ו- $(y,z) \in R$ אז: $(x,z) \in R$.

בגרף: אם יש מסלול באורך 2 מ- x ל- z אז יש גם קשת מ- x ל- z.

הרכבת רלציות:

$R_1 \subseteq A \times B,\ R_2 \subseteq B \times C,\ R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$

הגדרה: $R_1 \circ R_2 = \{(a,c) \mid \exists b \in B : (a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2\}$

$R \circ R = R^2$

סגור (closure): S הוא הסגור של R לפי α אם:

1. $R \subseteq S$.
2. S מקיים את α.
3. אם $R \subseteq T$ וגם T מקיים α אז $S \subseteq T$.

הסגור הטרנזיטיבי: $R^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k$.

הסגור הרפלקסיבי: $R \cup I_A,\ I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

הסגור הסימטרי: $R \cup R^{-1},\ R^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$

הערה: אין סגור אנטי-סימטרי.

יחסי שקילות:

יחס שקילות: נאמר שיחס E מעל קבוצה A הוא יחס שקילות אם E רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

מחלקת שקילות: יהי E יחס שקילות מעל קבוצה A. מחלקת השקילות של איבר $x \in A$ מסומנת ע"י: $[x]$ ומוגדרת באופן הבא: $[x] = \{y \mid (x,y) \in E\}$.

חלוקה: תהי A קבוצה. חלוקה של A היא קבוצה של תתי-קבוצות לא ריקות של A, זרות זו לזו שאיחודן הוא כל A.

קבוצת מנה: יהי E יחס שקילות מעל A. קבוצת המנה A/E מהווה חלוקה של A. כלומר, יחס השקילות משרה חלוקה של התחום לקבוצות זרות שהן מחלקות השקילות.

בגרף: עבור כל מחלקת שקילות- קליק (גרף מלא).

במטריצה: מטריצת בלוקים שיש בהם 1-ים על האלכסון.

למות להוכחת המשפט: יהי E יחס שקילות מעל A

1. לכל איבר $x \in A$ מתקיים: $x \in [x] \leftarrow [x] \neq \emptyset$.
2. לכל $x, y \in A$: $(x, y) \in E \leftrightarrow [x] = [y]$.
3. לכל $x, y \in A$: $[x] \neq [y] \leftrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$.
4. $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

פונקציות

פונקציה: רלציה f בין A ל- B היא פונקציה אם לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ יחיד כך ש- $f \ni (x,y)$.

קיום: $\forall a \in A, \exists b \in B : (a,b) \in f$.

יחידות: $\forall a \in A, \forall b_1, b_2 \in B : \ (a,b_1) \in f \ \ and \ \ (a,b_2) \in f \ \rightarrow \ b_1 = b_2$.

בגרף: מכל צומת ב- A יוצאת קשת אחת בדיוק לצומת ב- B.

סימון:
$$f \subseteq A \times B \Rightarrow f : A \rightarrow B$$
$$(a,b) \in f \ \Rightarrow \ f(a) = b$$

פונקציה חח"ע: פונקציה f המקיימת: $(a_1,b) \in f \wedge (a_2,b) \in f \ \rightarrow \ a_1 = a_2$.

פונקציה על: פונקציה f המקיימת: $\forall b \in B, \exists a \in A : \ (a,b) \in f$.

פונקציה הפיכה: פונקציה שהיא חח"ע ועל.

פונקציית k מקומית:
$$f \subseteq A^k \times B \ \Rightarrow \ f : A^k \rightarrow B$$
$$f \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times B \ \Rightarrow \ f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \rightarrow B$$

סגירות תחת פונקציות:

סגירות תחת פונקציה: תהי A קבוצה, $f : A \rightarrow A$ פונקציה. נאמר ש- $A_0 \subseteq A$ סגורה תחת f אם לכל $x \in A_0$ מתקיים: $f(x) \in A_0$.

סגירות תחת קבוצת פונקציות: תהי $F = \{ f_1, f_2, \cdots, f_m \}$ קבוצת פונקציות כאשר: $f_i : A^{k_i} \rightarrow A$. ($f_i$ פונקציה שהיא k_i מקומית), ותהי A קבוצה. נאמר ש- $A_0 \subseteq A$ סגורה תחת F אם לכל $1 \le i \le m$ מתקיים A_0 סגורה תחת f_i. כלומר לכל $a_1, \cdots, a_{k_i} \in A_0$ מתקיים: $f_i(a_1, \cdots, a_{k_i}) \in A_0$.

טענה: תהי F משפחת פונקציות מעל A ותהיינה $A_1, A_2 \subseteq A$ תתי-קבוצות סגורות תחת F, אז $A_1 \cap A_2$ סגורה תחת F.

הרחבת הטענה: תהי F משפחת פונקציות מעל A ותהי B קבוצת תתי-קבוצות של A שכל האיברים שלה סגורים תחת F, אז $\bigcap B$ סגורה תחת F.

הרכבת פונקציות:

הגדרה:
$$\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ g : B \rightarrow C \end{cases} \Rightarrow \ f \circ g(x) = g(f(x))$$

הערה: סדר ההפעלה הוא משמאל לימין, הפונקציה הכי שמאלית מופעלת ראשונה.

משפטים על הרכבה:

- אם f, g פונקציות אז גם $f \circ g$ היא פונקציה.
- אם f, g חח"ע אז גם $f \circ g$ היא חח"ע.
- אם f, g על אז גם $f \circ g$ היא על.
- אם f, g הפיכות אז גם $f \circ g$ הפיכה.
- אם $f \circ g$ על וגם g חח"ע אזי f על.

הגדרת קבוצות באינדוקציה

הגדרה: בהינתן קבוצת אטומים (קבוצת בסיס) B וקבוצת פעולות יצירה (פונקציות) F, מסמנים ב- $X_{B,F}$ את הקבוצה המוגדרת באינדוקציה ע"י B ו- F. $X_{B,F}$ היא הקבוצה היחידה המקיימת:

1. $B \subseteq X_{B,F}$.
2. $X_{B,F}$ סגורה תחת F: לכל $y_1, \cdots, y_k \in X_{B,F}$, אם z מתקבל מהם ע"י אחת הפעולות ב- F אז גם $z \in X_{B,F}$.
3. ב- $X_{B,F}$ קיימים רק איברים הכרחיים לקיום דרישות 1 ו-2.

מסקנה מהבנייה: כל קבוצה X שמקיימת את דרישות 1 ו-2 מכילה את $X_{B,F}$.

משפט ההוכחה באינדוקציה: על-מנת להוכיח שקבוצה $X_{B,F} \subseteq Y$, מספיק להוכיח:

1. $B \subseteq Y$.
2. Y סגורה תחת F.

סדרת יצירה: סדרת יצירה עבור a מתוך $X_{B,F}$ היא סדרה סופית $a_1, \cdots, a_n$ המקיימת:

1) $a_n = a$.

2) לכל $1 \le i \le n$, $a_i \in B$ או ש- a_i מתקבל ע"י הפעלת אחת הפעולות מ- F על איברים הנמצאים בסדרה.

הערה: סדרת יצירה היא לא יחידה ולא בהכרח סופית.

טענה: תהי B קבוצת גרעין ו- F קבוצת פעולות. אזי לכל איבר a, $a \in X_{B,F} \leftrightarrow$ ל- a קיימת סדרת יצירה מתוך $X_{B,F}$.

הוכחה שאיבר לא בקבוצה: על-מנת להוכיח ש $a \notin X_{B,F}$ נמצא תכונה T המקיימת:

(א) a לא מקיים T.

(ב) כל אברי $X_{B,F}$ מקיימים T (כל אברי הבסיס מקיימים T וקבוצת הפעולות משמרת את T).

עוצמות של קבוצות

עוצמה: בקבוצות סופיות, סימנו גודל קבוצה ב- $|A|$ וזו העוצמה של A.

משפט: תהיינה A ו- B קבוצות סופיות. $|A|=|B| \leftrightarrow$ קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל.

קבוצות שוות עוצמה: נאמר שקבוצות A ו- B הן שוות עוצמה אם קיימת $f:A\to B$ שהיא חח"ע ועל. סימון: $A \sim B$.

טענה: יחס $A \sim B$ הוא יחס שקילות. $R=\{(A,B) \mid A\sim B\}$.

הערה: מחלקות השקילות נקראות המספרים הקרדינליים.

קבוצה אינסופית:

הגדרה-1: קבוצה A תיקרא סופית אם המספר הקרדינלי שלה סופי. כלומר, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שקיימת התאמה חח"ע בין $\{1,\cdots,n\}$ ל- A. הקבוצה A אינסופית אם אינה עונה להגדרה סופית.

טענה: הקבוצה $\mathbb{N}$ היא אינסופית.

מסקנה: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת $f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע (לא בהכרח על).

הגדרה-2: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת $f:A\to A$ חח"ע ולא על, $f(A)\subsetneq A$.

טענה: הגדרה-1 והגדרה-2 הן שקולות.

טענה: $\mathbb{N}$ היא קבוצה אינסופית לפי הגדרה-2. $f(n)=2n$ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

מסקנות:

א. עבור קבוצות סופיות A ו- B כך ש- $|A|=|B|$, כל פונקציה חח"ע היא גם על וכל פונקציה שהיא על היא גם חח"ע.

ב. עבור קבוצות אינסופיות A,B כך ש- $|A|=|B|$ -בהכרח קיימת $g:A\to B$ חח"ע ולא על, וקיימת פונקציה על שהיא לא חח"ע.

ג. אף קבוצה היא לא אינסופית וגם סופית.

תכונות של קבוצות סופיות:

(1 אם A ו- B סופיות, אז: $A\times B,\ A\cap B,\ A\cup B,\ A^B$ הן קבוצות סופיות.

(2 כל איחוד סופי של קבוצות סופיות הוא סופי.

(3 כל מכפלה סופית של קבוצות סופיות היא סופית.

תכונות של קבוצות אינסופיות:

תהי A קבוצה אינסופית, אזי:

(1 כל קבוצה B כך ש- $A\subseteq B$ היא אינסופית.

(2 לכל קבוצה B עבורה קיימת $f:A\to B$ חח"ע, B אינסופית.

(3 לכל קבוצה B, אם קיימת $g:B\to A$ על, אז B אינסופית.

(4 $P(A)$ היא אינסופית.

(5 לכל קבוצה B, הקבוצה $A\cup B$ היא אינסופית.

(6 לכל קבוצה B לא ריקה, $A\times B$ היא אינסופית.

הגדרה: יהי $\Sigma\neq\varnothing$ אלפבית (קבוצה). נסמן ב- Σ^* את קבוצת המילים הסופיות מעל Σ.

טענה: אם $\Sigma\neq\varnothing$ אז: Σ^* אינסופית (כי קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to\Sigma^*$ חח"ע).

קבוצות בנות מנייה:

<u>סימון:</u> $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

<u>בת מנייה:</u> נאמר שקבוצה A היא בת-מנייה אם קיימת $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע.

<u>הגדרה שקולה:</u> קבוצה A היא בת-מנייה אם A סופית או מעוצמה $\aleph_0$.

<u>בת-מנייה אינסופית:</u> נאמר שקבוצה היא בת-מנייה אינסופית אם היא בת-מנייה ולא סופית.

<u>איך מראים על קבוצה אינסופית שהיא בת-מנייה:</u>

מוצאים $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע.

1. הצגת התאמה מפורשת.
2. הצגת סדר ספירה- מציגים סדר ספירה של איברי הקבוצה A בו מופיעים כל איברי הקבוצה וכל איבר מופיע כשלפניו מספר סופי של איברים.

   <u>הערה:</u> גם אם מציגים סדר ספירה עם חזרות ניתן לקבל ממנו סדר ספירה ללא חזרות.

איחוד קבוצות בנות מנייה:

<u>משפט:</u> תהיינה $A_1, \cdots, A_k$ קבוצות בנות-מנייה אינסופיות, אזי: $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ היא בת-מנייה אינסופית.

(כלומר, כל איחוד סופי של קבוצות בנות-מנייה הוא בן מנייה).

<u>משפט:</u> $\aleph_0 = |\mathbb{Z}^+|$. מסקנה: $\aleph_0 = |\mathbb{Z}|$.

<u>משפט:</u> תהי B קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ שאבריה הם קבוצות מעוצמה $\aleph_0$.

$$|A_i| = \aleph_0,\ B = \{A_0, A_1, \cdots\}.\ \left|\bigcup B\right| = \left|\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right| = \aleph_0.$$

(כלומר, איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה הוא בן-מנייה).

<u>משפט:</u> אם A ו- B הן קבוצות בנות-מנייה אינסופיות אז $A \times B$ היא קבוצה בת-מנייה אינסופית.

<u>משפט:</u> תהי A קבוצה בת-מנייה לא ריקה. אז A^* היא בת-מנייה אינסופית.

קבוצות שאינן בנות-מנייה:

<u>השוואה בין קבוצות:</u> נגדיר- $A \preceq B$ ונאמר ש- B לפחות בעוצמה של A אם קיימת פונקציה $f: A \to B$ חח"ע. נגדיר: $A \prec B$ אם $A \preceq$ וגם $B \not\succeq A$.

<u>משפט קנטור:</u> לכל קבוצה A, $A \prec P(A)$.

<u>הערה:</u> למעשה זה אומר שישנן אינסוף עוצמות.

<u>טכניקת לכסון:</u> הליכה על האלכסון במטריצה והפיכתו.

<u>ההוכחה באופן כללי:</u> עבור קבוצה A כלשהי, תהי $f: A \to P(A)$ פונקציה. נבנה קבוצה $B_f \subseteq A$ באופן הבא: $a \in B_f \leftrightarrow a \notin f(a)$. נראה ש- B_f לא מתקבלת ע"י f, כלומר: נראה שלא קיים $x \in A$ כך ש- $B_f = f(x)$.

<u>מסקנה:</u> $P(\mathbb{N})$ היא לא בת-מנייה.

<u>השערת הרצף:</u> לא קיימת קבוצה A כך ש- $\mathbb{N} \prec A \prec P(\mathbb{N})$.

<u>משפט קנטור-ברנשטיין:</u> אם $A \preceq B$ ו- $B \preceq A$ אז: $A \sim B$.

אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע וגם קיימת $g: B \to A$ חח"ע אז קיימת $h: A \to B$ חח"ע ועל.

משפטים נוספים:

- אם $A \subseteq B$ אז: $A \preceq B$
- כלל הסנדוויץ': אם $A \preceq B \preceq C$ וגם: $A \sim C$ אז: $A \sim B \sim C$
- $P(A) \sim \{0,1\}^A$ לכל קבוצה A.

תחשיב הפסוקים-הקדמה

סינטקס: איזה אותיות מרכיבות מילה. איזה מילים מרכיבות משפט.
סמנטיקה: המשמעות לסימנים.

סינטקס- הגדרה פורמאלית:

אותיות השפה: הסימנים $\{\wedge,\vee,\neg,\rightarrow,T,F,(,)\}$ וגם $\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי/מילה: כל סדרה סופית של סימנים בשפה.

נגדיר באינדוקציה את קבוצת המילים החוקיות בשפה:

בסיס: $B=\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{T,F\}$ (פסוקים אטומיים).

סגור: $F=\{F_\wedge,F_\vee,F_\neg,F_\rightarrow\}$. עבור סדרות α,β:

$$F_\wedge(\alpha,\beta)=(\alpha\wedge\beta) \qquad F_\vee(\alpha,\beta)=(\alpha\vee\beta)$$
$$F_\neg(\alpha)=(\neg\alpha) \qquad F_\rightarrow(\alpha,\beta)=(\alpha\rightarrow\beta)$$

קבוצת הפסוקים היא $X_{B,F}$ עבור B ו- F אלו. סימון נוסף: WFF.

משמעות תחשיב הפסוקים:

לכאורה, על-מנת לבדוק נכונות של פסוק, יש צורך לבדוק הצבה של כל הטענות כהנחות בפסוק. מה שיעניין אותנו לבדוק הוא רק האם הטענות נכונות או לא. לשם כך מגדירים קבוצת ערכי אמת- $\{0,1\}$.

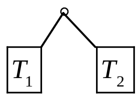
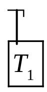
עץ יצירה:

הגדרה: עץ שבכל צומת שלו מופיע פסוק.

- אם הצומת הוא עלה בעץ, מופיע פסוק אטומי.
- אם הצומת מסומן בקשר דו-מקומי $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$ $(\alpha\circ\beta)$ אז לצומת שני בנים.
- אחרת, הצומת מסומן ב $\neg$ ויש לו בן אחד.

הגדרת קבוצת עצי יצירה:

בסיס: עצים עם צומת אחד p_i,T,F.

סגור: אם T_1,T_2 עצים אזי:  $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$ או 

חישוב ערך אמת במעלה עץ היצירה:

1. הצבת ערכים לעלים- ערכים לאטומים: נגדיר השמה: $z:\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\rightarrow\{0,1\}$. תפקיד ההשמה: לבדוק הצבה אפשרית של טענות לאטומים. עבור T - קבוע 1, עבור F - קבוע 0.
2. שלב טיפוס בעץ: נסמן ב- $z(p_i)$ את הערך שההשמה z נותנת ל- p_i.

   עבור פסוק α נסמן ב- $\bar{z}(\alpha)$ את הערך ש- α כאשר האטומים מקבלים ערכים לפי z.

   נניח ש- δ הוא הצומת הראשון שעדיין לא חושב אז: $\delta=(\alpha\circ\beta)$, או $\delta=(\neg\alpha)$.

   את הפעולות מקבלים מטבלאות האמת.

טבלאות אמת:

טבלאות שאומרות עבור כל קשר- לכל ערך של ארכי אמת לפסוקים α,β, מה יהיה הערך של: $(\alpha\circ\beta)$ או $(\neg\alpha)$.

$TT_{\vee}$

α	β	$(\alpha\vee\beta)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$TT_{\wedge}$

α	β	$(\alpha\wedge\beta)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$TT_{\rightarrow}$

α	β	$(\alpha\rightarrow\beta)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$TT_{\neg}$

α	$(\neg\alpha)$
0	1
1	0

באופן פורמאלי: נרצה לחשב את $\overline{z}(\gamma)$ עבור השמה נתונה z.

אם γ פסוק אטומי: $\gamma=p_i$, $\overline{z}(\gamma)=z(\gamma),\ \overline{z}(T)=1,\ \overline{z}(F)=0$.

אחרת:

אם $\gamma=(\neg\alpha)$ אז: $\overline{z}(\gamma)=TT_{\neg}(\overline{z}(\alpha))$.

אחרת: $\gamma=(\alpha\circ\beta)$ ו- $\overline{z}(\gamma)=TT_{\circ}(\overline{z}(\alpha),\overline{z}(\beta))$.

תכונות WFF מהתרגול:

1. α הוא אטום או ש- α מתחיל ב-(וגמר ב-).
2. מספרים הסוגריים הפותחים שווה למספר הסוגריים הסוגרים.
3. לכל רישא ממש לא ריקה של α, נסמן אותה β, מתקיים: $\#_{(}(\beta)>\#_{(}(\alpha)$ (גדול ממש).
4. בין כל $(\cdots)$ ב- α מופיע לפחות קשר אחד.
5. בין כל זוג אטומים יש קשר.

משפט סינטקטי- משפט הקריאה היחידה: (מבטיח שלכל פסוק יש עץ יצירה יחיד)

i. לכל פסוק α, אם קיימים β_1,γ_1 וקשר דו-מקומי a כך ש-$\alpha=(\beta_1 a\gamma_1)$ וכן קיימים β_2,γ_2 וקשר דו-מקומי b כך ש-$\alpha=(\beta_2 b\gamma_2)$ אזי: $\beta_1=\beta_2,\ a=b,\ \gamma_1=\gamma_2$.

ii. לכל פסוק α, אם קיים פסוק β כך ש-$\alpha=(\neg\beta)$ אז: לא קיימים γ,δ וקשר דו-מקומי a כך ש-$\alpha=(\gamma a\delta)$ וכן לכל β', אם $\alpha=(\neg\beta')$ אז: $\beta=\beta'$.

משפט הגדרת ערך האמת: תהי z השמה. לכל פסוק α קיים ערך יחיד $\bar{z}(\alpha)$ המחושב ע"פ טבלאות האמת בהינתן שערכי האטומים נקבעים לפי z.

סדר קדימויות: מגדירים סדר קדימויות לקשרים:

1. $\neg$ 2. $\wedge,\vee$ 3. $\rightarrow$

ניתן להשמיט סוגריים אם זה לא משנה את המשמעות. נשאיר סוגריים אם רוצים להפעיל לפי סדר קדימויות אחר או אם רוצים לקבוע סדר בין קשרים באותה חשיבות.

שלמות מערכת ההבעה של תחשיב הפסוקים:

מימוש טבלת אמת: נאמר שפסוק α מממש טבלת אמת T, אם T היא טבלת האמת של α.

שלמות מערכת קשרים: מערכת קשרים היא שלמה אם לכל טבלת אמת קיים פסוק בקשרים שמממש אותה.

טענה: מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים היא שלמה.

רעיון ההוכחה: בהינתן טבלת אמת T, נבנה פסוק αT שמממש את T.

אם T קבוע 0 אז: $\alpha T=F$

אחרת, עבור כל שורה בטבלה שהיא 1, נבנה פסוק α_i: רשימת כל האטומים שקיבלו 1 בשורה ה-i ושלילת כל האטומים שקיבלו 0 בשורה ה-i, חיבור ב $\wedge$.

בניית αT: מחברים ב-$\vee$ את כל ה-α-ים.

מונחי יסוד סמנטים:

טאוטולוגיה: פסוק α נקרא טאוטולוגיה אם לכל השמה z, $\bar{z}(\alpha)=1$.

דוגמאות:

- $(p_0\rightarrow p_1)\leftrightarrow(\neg p_1\rightarrow\neg p_0)$
- $(p_0\vee\neg p_0)$
- $\neg(p_0\wedge\neg p_0)$
- $\neg(p_0\wedge,\vee\, p_1)\leftrightarrow\neg p_0\wedge,\vee\neg p_1$
- $(p_0\wedge,\vee(p_1\wedge,\vee\, p_2))\leftrightarrow(p_0\wedge,\vee\, p_1)\vee,\wedge(p_0\wedge,\vee\, p_2)$

כיצד מראים שפסוק הוא טאוטולוגיה:

i. טבלת אמת: לכאורה צריך לבדוק את כל ההשמות בעולם ועבור כל אחת מהן, לוודא שערך האמת הוא-1. למעשה, לצורך חישוב ערך האמת משנים רק ערכי האמת שההשמה נותנת לאטומים המופיעים בפסוק. מספיק שנבנה טבלה המכילה את כל ההשמות האפשריות לאטומים שמופיעים בפסוק, ונבדוק שכל השורות הן 1.

ii. הוכחה מילולית: מחפשים מה צריכה השמה z לקיים כדי ש $\bar{z}(\alpha)=0$ ומראים שלא יתכן z כזו.

נביעה לוגית: נאמר שפסוק α נובע לוגית מפסוק β (או β גורר לוגית את α) אם לכל השמה z, אם $\bar{z}(\beta)=1$ אז $\bar{z}(\alpha)=1$. סימון: $\beta\models\alpha$.

טענה: $\beta\rightarrow\alpha$ טאוטולוגיה אם"ם $\alpha\models\beta$ ($\alpha\models\beta\leftrightarrow\models\alpha\rightarrow\beta$).

סתירה: נאמר שפסוק α הוא סתירה אם לכל השמה z, $\bar{z}(\alpha)=0$.

α טאוטולוגיה $\leftarrow$ $\neg\alpha$ סתירה.

α סתירה $\leftarrow$ $\neg\alpha$ טאוטולוגיה.

α לא טאוטולוגיה $\not\leftarrow$ α סתירה.

פסוק ספיק: פסוק α נקרא ספיק אם קיימת השמה z, $\bar{z}(\alpha)=1$. סימון: $z\vDash\alpha$.

איך מראים מהו סוגו של פסוק?

	סתירה	ספיק	טאוטולוגיה
להראות כן	1. טבלת אמת. 2. הוכחה מילולית	מראים השמה מספקת	1. טבלת אמת 2. הוכחה מילולית
להראות לא	מראים השמה מספקת	1. טבלת אמת 2. הוכחה מילולית	קיימת השמה לא מספקת

הגדרות:

- נאמר שהשמה z מספקת קבוצת פסוקים x אם לכל $\alpha\in x$ $\bar{z}(\alpha)=1$. סימון: $z\vDash x$.
- נאמר שפסוק α נובע לוגית מקבוצת פסוקים x אם לכל השמה z שמספקת את x מתקיים: $z\vDash\alpha$. סימון: $x\vDash\alpha$.
- קבוצת פסוקים x היא ספיקה אם קיימת השמה z שמספקת את x.
- פסוקים α ו- β שקולים לוגית אם לכל השמה z, $\bar{z}(\alpha)=\bar{z}(\beta)$. סימון: $\alpha\equiv\beta$. שקול להגדרה: $\alpha\vDash\beta\ \wedge\ \beta\vDash\alpha$.

טענה: $\vDash(\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow\alpha\equiv\beta$

משפט: תהי $\Sigma=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ קבוצת פסוקים ותהי $K(\varphi_i)$ - קבוצת ההשמות שמספקות את φ_i.
אז קבוצת ההשמות שמספקות את Σ היא: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}k(\varphi_i)$

איך מוכיחים שמערכת קשרים היא שלמה?

i. הוכחה ישירה.

ii. מתבססים על מערכת ישנה הידועה כשלמה ומראים כיצד לבטא כל קשר במערכת הישנה באמצעות הקשרים במערכת החדשה.

דוגמא: נוכיח ש- $\{\neg,\wedge\}$ שלמה. ראינו ש- $\{\neg,\vee,\wedge\}$ היא מערכת שלמה. כך נבטא $\vee$ במערכת החדשה: $(\alpha\vee\beta)\equiv\neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$.

איך מוכיחים שמערכת קשרים היא לא שלמה?

מוכיחים תכונה סמנטית על-גבי המערכת החדשה ומראים טבלת אמת שלא מקיימת את התכונה.

הוכחת נביעה לוגית:

דוגמא: לכל קבוצת פסוקים x ופסוקים α,β, אם $x\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ ו- $x\cup\{\neg\alpha\}\vDash\beta$ אז: $x\vDash\beta$.

הוכחה:

נניח ש- $x\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ ו- $x\cup\{\neg\alpha\}\vDash\beta$ ונראה: $x\vDash\beta$.

תהי z השמה. נראה שאם $z\vDash x$ אז $z\vDash\beta$. קיימות שתי אפשרויות:

1. אם $z\vDash\alpha$ אז: $z\vDash\{\alpha\}\cup x$ ומאחר ו- $x\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ אז $z\vDash\beta$.
2. אחרת $z\vDash\neg\alpha$ אז: $z\vDash\{\neg\alpha\}\cup x$ ומאחר ו- $x\cup\{\neg\alpha\}\vDash\beta$ אז $z\vDash\beta$. $x\cup\{\alpha,\alpha\to\beta\}\vDash\beta$.

נביעות לוגיות נוספות:

- לכל α,β,γ, אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\beta$ ו- $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\neg\beta$ אז: $\gamma\models\alpha$.
- אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\alpha$ אז $\gamma\models\alpha$ (מקרה פרטי שבו $\beta=\alpha$).
- $x\cup\{\alpha,\alpha\to\beta\}\models\beta$ (x היא קבוצת פסוקים).
- תהיינה Σ_1,Σ_2 קבוצות פסוקים. אם $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$ אז לכל פסוק α, אם $\Sigma_1\models\alpha$ אז $\Sigma_2\models\alpha$.

הצבות:

<u>הגדרה:</u> נתונה פונקצית הצבה $s:\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\to WFF$. נגדיר באינדוקציה על מבנה הפסוק את $sub(\varphi,s)$ - הפסוק המתקבל מ- φ ע"י החלפת כל אטום בערך שפונקצית ההצבה s מתאימה לו.

<u>בסיס:</u> $\varphi=p_i$, $sub(\varphi,s)=s(p_i)$ וגם $sub(F,s)=F$, $sub(T,S)=T$.

<u>סגור:</u> φ_1,φ_2, $\circ\in\{\wedge,\vee,\to\}$

$$sub((\varphi_1\circ\varphi_2),s)=(sub(\varphi_1,s)\circ sub(\varphi_2,s))$$
$$sub(\neg\varphi_1,s)=\neg sub(\varphi_1,s)$$

<u>טענה:</u> יהי φ פסוק שבו מופיעים האטומים: $\{p_0,\cdots,p_n\}$ ותהיינה s_1,s_2 פונקציות הצבה עבורן לכל $0\le i\le n$ $s_1(p_i)=s_2(p_i)$. אז: $sub(\varphi,s_1)=sub(\varphi,s_2)$.

<u>טענה:</u> תהי s פונקצית הצבה ותהי z פונקצית השמה. נגדיר פונקצית הצבה חדשה z'. לכל i $z'(p_i)=\overline{z}(s(p_i))$. אזי לכל פסוק φ: $\overline{z}(sub(\varphi,s))=z'(\varphi)$.

(כלומר: אפשר לבצע את ההחלפה ע"י sub לפני ההצבה ע"י $\overline{z}$).

<u>טענה:</u> תהי φ טאוטולוגיה, אזי לכל פונקצית הצבה s מתקיים: $sub(\varphi,s)$ גם טאוטולוגיה.

צורות נורמאליות:

<u>Negation Normal Form – NNF:</u>

<u>בסיס:</u> $\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i|i\in\mathbb{N}\}$ <u>סגור:</u> $\{F_\vee,F_\wedge\}$

(אפשר לשים $\neg$ רק בבסיס ואז אפשר לשים $\wedge,\vee$ באיזה סדר שרוצים).

<u>Conjunctive Normal Form -CNF:</u>

1. מגדירים קבוצה Disj.

<u>בסיס:</u> $\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i|i\in\mathbb{N}\}$ <u>סגור:</u> $\{F_\vee\}$

2. מגדירים CNF

<u>בסיס:</u> Disj <u>סגור:</u> $\{F_\wedge\}$

(כמו NNF רק עם הגבלה נוספת- אפשר לשים $\wedge$ רק אחרי $\vee$).

<u>Disjunctive Normal Form -DNF:</u>

1. מגדירים קבוצה Conj.

<u>בסיס:</u> $\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i|i\in\mathbb{N}\}$ <u>סגור:</u> $\{F_\wedge\}$

2. מגדירים DNF

<u>בסיס:</u> Conj <u>סגור:</u> $\{F_\vee\}$

(כמו CNF רק הפוך, קודם מותר לשים $\wedge$ ורק אחריו ניתן לשים $\vee$).

<u>משפט ה-DNF:</u> לכל פסוק φ קיים פסוק שקול φ' מצורת DNF.

<u>הערה:</u> בהינתן פסוק α, נבנה לו טבלת אמת ואז נממש אותו בפסוק DNF.

מערכת הוכחה פורמאלית

איך בונים מערכת הוכחה?

1. קבוצת אקסיומות (שקל לבדוק אם משהו הוא אקסיומה).
2. כללי היסק- כללים שבאמצעותם מסיקים שורות חדשות בהוכחה.
3. קבוצת המשפטים הפורמאליים (כללי היסק, אקסיומות)X.

הוכחה פורמאלית היא סדרת יצירה במבנה זה.

יכיח: נאמר ש- α יכיח אם יש לו סדרת הוכחה. סימון: $\vdash \alpha$

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים:

קבוצת האקסיומות: פסוק φ הוא אקסיומה אם קיימים פסוקים α,β,γ כך ש- φ מאחת התבניות הבאות:

A1. $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$

A2. $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$

A3. $(((\alpha \to F) \to F) \to \alpha)$

כלל ההיסק: $\dfrac{\alpha,\alpha \to \beta}{\beta}\ MP$ (אם יש $\alpha,\alpha \to \beta$ ניתן להסיק ממנו את β).

קבוצת המשפטים הפורמאליים: ({MP}, אקסיומות)X

סדרת הוכחה עבור פסוק α היא סדרה סופית $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ עבורה מתקיים:

1. $\alpha_n = \alpha$.
2. לכל $1 \le i \le n$, α_i היא אקסיומה או α_i התקבל ע"י MP מפסוקים קודמים בסדרה.

הוכחה מתוך הנחות:

בהינתן קבוצת הנחות (פסוקים) Y, קבוצת המסקנות של Y היא:

$Ded(Y) = X(Y \cup axiomot,\{MP\})$. אם $\alpha \in Ded(Y)$ אז מסמנים: $Y \vdash \alpha$.

תכונות של הוכחה מתוך הנחות:

הנחת המבוקש: אם $X \ni \alpha$ אז: $X \vdash \alpha$.

סופיות ההוכחה: אם $X \vdash \alpha$ אז קיימת $Y \subseteq X$ סופית כך ש: $Y \vdash \alpha$.

מונוטוניות: אם $Y \subseteq X$ אז לכל פסוק α אם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$.

מסקנה: אם $\vdash \alpha$ אז לכל קבוצה X, $X \vdash \alpha$.

מונוטוניות מחוזקת: אם לכל $X \ni \alpha$ מתקיים $Y|\text{--}\alpha$ אז לכל פסוק β, אם $X \vdash \beta$ אז $Y \vdash \beta$.

טענה-4: תהי s פונקצית הצבה, תהי Σ קבוצת פסוקים. אזי לכל פסוק φ כך ש- $\Sigma \vdash \varphi$ מתקיים:

$sub(\Sigma,s) \vdash sub(\varphi,s)$ $\quad sub(\Sigma,s) = \{sub(\alpha,s) \mid \alpha \in \Sigma\}$ יכיחות נשמרת תחת הצבות.

משפט הדדוקציה: לכל קבוצת הנחות X ופסוקים α,β, $X \vdash \alpha \to \beta \leftrightarrow X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

דוגמא לשימוש: אם רוצים להוכיח: $\vdash \alpha \to \alpha$ מספיק להוכיח: $\{\alpha\} \vdash \alpha$.

משפט הדיכוטומיה: אם $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ וגם $\Sigma \cup \{\alpha \to F\} \vdash \beta$ אז: $\Sigma \vdash \beta$.

עקביות של קבוצת הנחות:

הגדרה: קבוצת הנחות X תיקרא עקבית אם $X \nvdash F$.

הסופיות של העקביות: לכל קבוצת הנחות X, X קבוצה עקבית אם"ם כל תת-קבוצה סופית של X היא עקבית.

האם קיימת קבוצה עקבית?

שקול לשאלה- האם קבוצת האקסיומות עקבית (או האם הקבוצה הריקה היא עקבית).

משפט הנאותות הצר: כל פסוק יכיח הוא טאוטולוגיה (אם $\vdash \alpha$ אז $\vDash \alpha$)

קשר ראשון בין סינטקס לסמנטיקה.

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת הנחות X ולכל פסוק α, אם $X \vdash \alpha$ אז $X \vDash \alpha$.

הערה: עבור $X = \varnothing$ מקבלים את משפט הנאותות הצר.

מסקנה: קיימת קבוצה עקבית. ($\varnothing$).

משפט שקול לנאותות: לכל קבוצה X, אם X ספיקה אז X עקבית.

הגדרה: קבוצה X תיקרא עקבית מקסימאלית אם X עקבית ולכל פסוק α, $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \alpha \to F$ (קבוצה שיש לה "דעה" על כל α).

משפט: לכל קבוצה עקבית X, קיימת קבוצה עקבית מקסימאלית Y ומתקיים: $X \subseteq Y$.

הרעיון: נוכל להוסיף ל- X פסוקים כך שתהיה לה דעה על כל דבר. בתהליך ההוספה נקפיד שלא לפגוע בעקביות.

טענה: תהי Y קבוצה עקבית מקסימאלית. אז לכל זוג פסוקים β,γ מתקיים:
$Y \vdash \beta \to \gamma \leftrightarrow Y \vdash \gamma$ או $Y \vdash \beta \to F$.

טענה: תהי Y קבוצה עקבית. אם לכל β,γ מתקיים: $Y \vdash \beta \to \gamma \leftrightarrow Y \vdash \gamma$ או $Y \vdash \beta \to F$ אז Y היא קבוצה עקבית מקסימאלית.

משפט: Σ לא עקבית אם"ם קיים α כך ש- $\Sigma \vdash \alpha$ וגם $\Sigma \vdash \alpha \to F$

משפט: Σ עקבית אם"ם קיים α כך ש- $\Sigma \nvdash \alpha$.

ספיקות של קבוצה עקבית מקסימאלית:

טענה: אם Y קבוצה עקבית מקסימאלית, אז Y קבוצה ספיקה.

משפט: תהי X קבוצה. אם X עקבית אז X ספיקה.

משפט השלמות לתחשיב הפסוקים: אם $X \vDash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$.

משפט: X קבוצה עקבית מקסימאלית $\leftrightarrow$ קיימת השמה יחידה שמספקת את X.

משפט הקומפקטיות: X קבוצה ספיקה $\leftrightarrow$ כל תת-קבוצה של X היא ספיקה.

בעיות צביעה של גרפים

הגדרה: $G=(V,E)$ לא בהכרח סופי. נאמר ש- G ניתן לצביעה חוקית בשני צבעים אם ניתן לצבוע את כל צמתי הגרף בשני צבעים (כל צומת בצבע אחד) כך שלא תהיה קשת ששני קצותיה צבועים באותו הצבע (קשת מונוכרומטית).

משפט: G ניתן לצביעה חוקית בשני צבעים אם"ם כל תת-גרף סופי של G ניתן לצביעה חוקית בשני צבעים.

תרגום הבעיה לפסוקים: בהיתן גרף G, נחפש קבוצת פסוקים X_G עבורה יתקיים: G 2-צביע $\leftrightarrow$ X_G ספיקה. כל צומת יהיה אטום וערך האמת יהיה הצבע.

$X_G=\left\{\alpha_{(i,j)} \mid (i,j)\in E\right\}, \alpha_{(i,j)}=p_i\oplus p_j$. כאשר: $\bar{z}\left(\alpha_{(i,j)}\right)=1$ אם"ם p_i ו- p_j צבועים בערכי אמת שונים.

טענה: G הוא 2-צביע אם"ם X_G ספיקה.

שיטה כללית:

X מקיים α אם"ם כל תת-קבוצה סופית של X מקיימת α.

1. תרגום של הבעיה לפסוקים. X_A ספיקה $\leftrightarrow$ A מקיים α.
2. שימוש במשפט הקומפקטיות בזהירות.

גדירות

הגדרה: נאמר שקבוצת פסוקים Σ מגדירה את אוסף ההשמות שמספקות אותה.

סימון: $Ass(\Sigma)=\{z \mid z \vDash \Sigma\}$. $Mod(\Sigma)$ נקראת קבוצת המודלים של Σ.

משפט: אם $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ אז: $Ass(\Sigma_2) \subseteq Ass(\Sigma_1)$.

הגדרה: בהינתן קבוצת השמות K, אם קיימת קבוצת פסוקים Σ שמגדירה אותה אז K גדירה.

האם קיימות קבוצות לא גדירות?

כן, משיקולי ספירה: ישנם $\aleph_0$ פסוקים ו- $2^{\aleph_0}$ קבוצת פסוקים. אבל ישנן $2^{\aleph_0}$ השמות ולכן $2^{2^{\aleph_0}}$ קבוצת של השמות. ולכן בהכרח קיימות קבוצות של השמות שאינן גדירות.

קבוצות גדירות: $\varnothing$, קבוצת כל ההשמות, $\{z\}$ לכל השמה z, קבוצת כל ההשמות הנותנות T ל-J אטומים לכל היותר.

קבוצות לא גדירות: K_{fin} - קבוצת כל ההשמות שנותנות T למספר סופי של אטומים.

$K_{\inf}$ - קבוצת כל ההשמות שנותנות T למספר אינסופי של אטומים.

$Ass \setminus \{z_F\}$ - קבוצת כל ההשמות שנותנות T לאטום אחד לפחות.

הערה: תמיד קבוצת כל ההשמות פחות השמה אחת- לא גדיר.

סכימה כללית להוכחת אי-גדירות:

1. מניחים בשלילה ש- K גדירה.
2. תהי Σ קבוצה שמגדירה את K, $K=Mod(\Sigma)$.
3. מצרפים ל- Σ קבוצת פסוקים Σ' ומראים:

3.1 $\Sigma \cup \Sigma'$ לא ספיקה. (מחפשים $Mod(\Sigma)\cap Mod(\Sigma')=\varnothing$).

3.2 $\Sigma \cup \Sigma'$ כן ספיקה. (שימוש בקומפקטיות: כל ת"ק סופית של Σ' ניתן לספק ע"י השמה מ- K. יש למצוא z_D מתאימה כאשר: $D \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$).

4. מכך מסיקים שלא תיתכן Σ כזו.

סכימה כללית להוכחת גדירות של קבוצת השמות-K:

1. מגדירים Σ.
2. מראים $z \vDash \Sigma \leftarrow z \in K$.
3. מראים $z \in K \leftarrow z \vDash \Sigma$.

משפט: שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. K גדירה ו- K^c גדירה ($K^c=\{All\ Ass\} \setminus K$).
2. K גדירה ע"י קבוצה סופית.
3. K גדירה ע"י קבוצה המכילה פסוק יחיד.

תחשיב היחסים

הגדרות:

רעיון מרכזי: שני רכיבים- עצמים+תכונות. לתכונות קוראים יחסים: $\exists$-קיים, $\forall$ - לכל.

קיימים שני סוגים של סימנים:

1. סימנים לוגיים: משותפים לכל השפות של תחשיב הפסוקים- משתנים, קשרים מתחשיב הפסוקים, $\approx, \forall, \exists$, סוגריים, פסיק.
2. פרמטרים של השפה:
   - סימני קבועים אישיים של המילון- מסומנים ב- C_α, α-אינדקס מספרי.
   - סימני יחס- $R_{n,\alpha}$, α-אינדקס מספרי, n-מספר מקומות.
   - סימני פונקציה- $F_{n,\alpha}$ - α-אינדקס מספרי, n - מספר מקומות.

מילון: אוסף סימני יחס, סימוני פונקציה וסימוני קבועים כאשר לכל סימן יחס ולכל סימן פונקציה ידוע מספר הארגומנטים.

הגדרת אוסף המילים בשפה:

שלב-1: נגדיר את העצמים שעליהם טוענים טענות. הגדרת שמות העצם באינדוקציה:

בסיס: סימני הפונקציות מהמילון, משתנים $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

צעד: סימני הפונקציות מהמילון. אם $t_1, \cdots, t_n$ הם שמות עצם במילון, F_α סימן פונקציה n-מקומי אז $F_\alpha(t_1, \cdots, t_n)$ שם-עצם. מספר הפעולות הוא כמספר סימני הפונקציה במילון.

דוגמא לשמות עצם: $c_0, v_0, v_8, F_1(v_5), F(v_3, c_1)$.

שלב-2: הגדרת אוסף הנוסחאות: הגדרה באינדוקציה:

בסיס: כל סדרה מהצורה $R(t_1, \cdots, t_n)$ כאשר R סימן יחס n-מקומי במילון ו- $t_1, \cdots, t_n$ שמות-עצם במילון. כל נוסחא מהצורה $(t_1 \approx t_2)$ עבור t_1, t_2 שמות עצם במילון.

הנוסחאות מהבסיס נקראות: נוסחאות אטומיות.

נוסחא אטומית: בהינתן $t_1, \cdots, t_n$ שמות עצם, שימוש ב- $R(t_1, \cdots, t_n)$ ייתן נוסחא אטומית.

אבחנה בין שם-עצם לנוסחא אטומית- על שם-עצם לא ניתן לשאול האם הוא נכון/לא נכון.

דוגמאות לנוסחאות אטומיות: $R(c_0, c_1, c_2), (c_0 \approx v_1), (c_2 \approx F_1(v_3))$.

צעד:

1. קשרים מתחשיב הפסוקים: $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$.
2. כמתים: α נוסחא ו- v_i משתנה, $\forall v_i \alpha, \exists v_1 \alpha$ - נוסחאות. (חייבים לשים לידם משתנה).

הערה: לכמתים יש קדימות.

סמנטיקה בתחשיב היחסים:

נרצה פירוש עבור הסימנים בעולם והעולם שמעליו שואלים.

הגדרה: בהינתן מילון τ, $\tau = \langle c_0, \cdots, c_k, R_0, \cdots, R_l, F_0, \cdots, F_b \rangle$ מבנה עבור τ:

$M = \langle D^M, c_0^M, \cdots, c_k^M, R_0^M, \cdots, R_l^M, F_0^M, \cdots, F_b^M \rangle$ כאשר:

D^M - העולם.

R_i^M - הפירוש של סימן היחס R_i במבנה M. R_i סימן יחס l מקומי: $R_i^M \subseteq \underbrace{D^M \times \cdots \times D^M}_{l\ times}$.

F_i^M - הפירוש של סימן הפונקציה F_i במבנה M. F_i סימן פונקציה b-מקומי: $F_i^M : \underbrace{D^M \times \cdots \times D^M}_{b\ times} \to D^M$.

c_i^M - הפירוש של סימן הקבוע c_i במבנה M. $c_i^M \in D^M$.

<u>דוגמא:</u>

$$\tau = \langle c_0, c_1, R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F_1(\circ,\circ), F_2(\circ,\circ,\circ)\rangle$$
$$M_1 = \langle \mathbb{N}, 0, 1, even, \leq, +, \cdot\rangle$$
$$M_2 = \langle P(\mathbb{N}), \varnothing, \mathbb{N}, is\ empty?, \subseteq, \cup, \cap\ \cap\rangle$$

<u>השמה:</u> פונקציה שנותנת למשתנים את ערכם: $z : \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to D^M$.

<u>סימון:</u> $z(v_i)$ - הערך שההשמה z נותנת ל- v_i.

השמה מורחבת: השמה שנותנת ערכים לכל שמות העצם (ולא רק למשתנים):

$\bar{z}$: שמות עצם $\to D^M$ הגדרה באינדוקציה על מבנה שמות העצם:

<u>בסיס:</u> $t = v_i,\ \bar{z}(t) = z(v_i)$. $t = c,\ \bar{z}(t) = c^M$.

<u>צעד:</u> $t = F(t_1, \cdots, t_m)$ כאשר $t_1, \cdots, t_m$ שמות עצם מעל המילון ו- F הוא סימן פונקציה n מקומי מהמילון. אז: $\bar{z}(t) = F^M(\bar{z}(t_1), \cdots, \bar{z}(t_m))$.

<u>סימון:</u> $z_1 =_i z_2$, המשמעות: לכל $j \neq i$ מתקיים: $z_1(v_j) = z_2(v_j)$.

משתנים חופשיים ומשתנים קשורים:

הגדרה פורמאלית של משתנים חופשיים וקשורים:

נגדיר באינדוקציה על מבנה נוסחא α, מתי משתנה v_i חופשי בנוסחא α:

<u>בסיס:</u> α נוסחא אטומית, אם v_i מופיע ב- α אז v_i חופשי ב- α.

<u>צעד:</u> קשרים: v_i חופשי ב-$(\alpha \circ \beta)$ עבור $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$ אם v_i חופשי ב- α או חופשי ב- β.

v_i חופשי ב-$(\neg\alpha)$ אם v_i חופשי ב- α.

כמתים: v_i חופשי ב- $\exists / \forall v_j \alpha$ אם v_i חופשי ב- α ו- $i \neq j$.

<u>הערה:</u> משתנה לא חופשי ב- α הוא משתנה קשור ב- α.

לחישוב ערך האמת נחוץ למעשה רק הערך שההשמה נותנת למשתנים החופשיים בנוסחא.

<u>**מסקנות:**</u>

- עבור נוסחא α והשמות z_1, z_2 שמזדהות על המשתנים החופשיים ב- α מתקיים: ערך האמת של α לפי z_1 זהה לערך האמת של α לפי z_2.
- אם בנוסחא אין משתנים חופשיים, ערך האמת של הנוסחא אינו תלוי בהשמה.

<u>**פסוק:**</u> נוסחא ללא משתנים חופשיים. ערך האמת ייקבע באופן מוחלט ע"י המבנה.

- הדבר ביחיד שנותן משמעות לקבועים זה מבנה.
- הדבר היחיד שנותן משמעות למשתנים זה השמה.

הגדרת ערך האמת: יהי τ מילון ותהי α נוסחא מעל τ.
נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחא α מתי מבנה M והשמה z מספקים את α:
בסיס: α נוסחא אטומית, $\alpha = R(t_1,\cdots,t_n)$. $M \vDash_z \alpha \leftrightarrow (\bar{z}(t_1),\cdots,\bar{z}(t_n)) \in R^M$.
צעד: קשרים- לפי טבלאות האמת כמו בתחשיב הפסוקים.
כמתים- נניח שיודעים לכל מבנה M' והשמה z' האם $M' \vDash_{z'} \alpha$ ורוצים לדעת האם $M \vDash_z \exists / \forall v_i\alpha$. נרצה כלי שיאפשר לעבור על כל הערכים האפשריים, לשים אותם ב- v_i ולבדוק α

השמה מתוקנת: יהי M מבנה, z השמה ו- $d \in D^M$. מגדירים השמה חדשה $z[v_i \leftarrow d]$ באופן הבא: $z[v_i \leftarrow d](v_j) = \begin{cases} z(v_j) & j \neq i \\ d & j = i \end{cases}$.

לכל $d \in D^M$, $M \vDash_z \forall v_i\alpha$ אם"ם: $M \vDash_{z[v_i\leftarrow d]} \alpha$.

קיים $d \in D^M$, $M \vDash_z \exists v_i\alpha$ אם"ם: $M \vDash_{z[v_i\leftarrow d]} \alpha$.

אמיתות לוגיות:

אמת לוגית: נוסחא α היא אמת לוגית אם לכל מבנה M ולכל השמה z ב- M, $M \vDash_z \alpha$.
סימון: $\vDash \alpha$.
דוגמא: $\alpha_1 = \forall v_1 R(v_1,v_2) \vee \neg\forall v_1 R(v_1,v_2)$. למעשה זו הצבה של $\forall v_1 R(v_1,v_2)$ בתוך p_1 בטאוטולוגיה הפסוקית: $(p_1 \vee \neg p_1)$. מאחר והמשמעות של טבלאות האמת זהה לתחשיב הפסוקים, הנוסחא המתקבלת היא אמת לוגית.
משפט: כל הצבה של נוסחאות במקום האטומים בטאוטולוגיה פסוקית תיתן אמת לוגית.
סתירה: נוסחא α מעל מילון τ היא סתירה אם לכל מבנה M עבור τ ולכל השמה z ב- M, $M \nvDash_z \alpha$.

נוסחא ספיקה: נוסחא α מעל מילון τ היא ספיקה אם קיים מבנה M עבור τ וקיימת השמה z ב- M כך ש- $M \vDash_z \alpha$.

סימונים: $M \vDash \alpha$ אם לכל השמה z ב- M מתקיים: $M \vDash_z \alpha$.

$M \nvDash \alpha$ אם קיימת השמה z ב- M כך ש: $M \nvDash_z \alpha$.

מבנה והשמה מספקים: נאמר שמבנה M והשמה z מספקים קבוצת נוסחאות Σ.
נביעה לוגית: נאמר שנוסחא β נובעת לוגית מנוסחא α ונסמן: $\alpha \vDash \beta$, אם לכל מבנה M ולכל השמה z ב- M, אם $M \vDash_z \alpha$ אז $M \vDash_z \beta$.

גרירה לוגית: קבוצת נוסחאות Σ גוררת לוגית נוסחא α $(\Sigma \vDash \alpha)$ אם לכל מבנה M ולכל השמה z, אם $M \vDash_z \Sigma$ אז: $M \vDash_z \alpha$.

טענות נוספות מתחשיב הפסוקים:

- $\alpha \vDash \beta \leftrightarrow \vDash \alpha \to \beta$.
- α סתירה $\leftrightarrow \neg\alpha$ אמת לוגית.

שקילות לוגית: נאמר שנוסחא α שקולה לוגית לנוסחא β ונסמן: $\alpha \equiv \beta$ אם לכל מבנה M ולכל השמה z, $M \vDash_z \beta \leftrightarrow M \vDash_z \alpha$.

גדירות בתחשיב היחסים:

גדירות של יחסים:

הגדרה: בהינתן מילון τ, מבנה M ויחס n-מקומי R, נאמר שהיחס R גדיר (ע"י הנוסחה φ) אם קיימת נוסחה φ בעלת n משתנים חופשיים $v_1, v_2, \cdots, v_n$ המקיימת:
$M \vDash_z \varphi \leftrightarrow \left(\bar{z}(v_1), \bar{z}(v_2), \cdots, \bar{z}(v_n)\right) \in R$ לכל השמה z.

הערה: R לא בהכרח במילון ולכן גם R לא מופיע בנוסחה φ.

דוגמא: $\tau = \left\langle P(\circ), F(\circ,\circ), c \right\rangle$, $M = \left\langle \square, \square, /, 0 \right\rangle$. רוצים להגדיר את: $Q(\circ) = \square$ (כלומר להגדיר יחס של כל המספרים הרציונאליים).

הנוסחה המגדירה את היחס: $\varphi = \exists v_1 \exists v_2 \left(P(v_1) \wedge P(v_2) \wedge \left(F(v_1, v_2) \approx v_3\right) \wedge \left(\neg (v_2 \approx c)\right)\right)$

הנוסחה אומרת: קיימים לפחות v_1 ולפחות v_2 שבהינתן v_3 רציונאלי, מקיימים את התנאים: שניהם שלמים, חלוקה שלהם אחד בשני שווה ל-v_3, $v_2 \neq 0$.

משפט הקומפקטיות: קבוצת פסוקים Σ ספיקה אם"ם כל ת"ק סופית של Σ היא ספיקה.

גדירות של מבנים:

מודלים של נוסחה: $Mod(\varphi) = \left\{(M, z) | M \vDash_z \varphi\right\}$.

מודלים של פסוק: $Mod(\varphi) = \{M | M \vDash \varphi\}$

מודלים של קבוצת פסוקים: $Mod(\Sigma) = \{M | M \vDash \Sigma\}$. קבוצת פסוקים מגדירה את קבוצת המודלים שלה.

הגדרה: בהינתן קבוצת מבנים K (עבור מילון τ) נאמר שהיא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ מעל τ שמגדירה את K.

הנחה: אין מבנים ריקים.

דוגמא-1: מילון ריק, $\Sigma_1 = \left\{\exists v_1 \exists v_2 \neg (v_1 \approx v_2)\right\}$. מהי קבוצת המודלים?

פיתרון: $Mod(\Sigma_1) = \left\{M \mid 2 \leq |D^M|\right\}$, כלומר: כל מודל שיש לו לפחות שני איברים בתחום.

דוגמא-2: מילון ריק, $K_2 = \left\{M \mid |D^M| = 1\right\}$. האם K_2 גדירה?

פיתרון: כן, ע"י: $\Sigma_2 = \left\{\forall v_1 \forall v_2 (v_1 \approx v_2)\right\}$.

דוגמא-3: $\tau = \left\langle R(\circ,\circ)\right\rangle$, $\Sigma_3 = \left\{\forall v_1 \forall v_2 \left(R(v_1, v_2) \to R(v_2, v_1)\right)\right\}$. מהי קבוצת המודלים?

פיתרון: $Mod(\Sigma_3) = \left\{M | R^M \ symeric\right\}$.

דוגמא-4: מילון ריק, $K_{\inf} = \{$ הוא אינסופי $D^M\}$. האם $K_{\inf}$ גדירה?

פיתרון: לכל מספר n נבנה פסוק α_n שאומר שישנם לפחות n איברים בתחום:
$\alpha_n = \exists v_1 \cdots \exists v_n \underset{i \neq j}{\wedge} \neg (v_i \approx v_j)$. אזי: $\Sigma_{\inf} = \{\alpha_n | n \geq 2\}$ מגדירה את $K_{\inf}$.

תחום שאינו חסום: תהי Σ קבוצת פסוקים. נאמר שגודל התחום במבנים של Σ אינו חסום אם לכל מספר טבעי $n \in \square$ קיים מבנה M שמספק את Σ ומקיים: $|D^M| \geq n$.

הערה: "לא חסום" שונה מ"אינסופי".

דוגמא: הטבעיים זו קבוצה לא חסומה אבל אין מספר טבעי אינסופי.

משפט: תהי Σ קבוצת פסוקים בתחשיב היחסים. אם גודל התחום במבנים של Σ לא חסום, אז ל- Σ קיים מבנה שמספק אותה בעל תחום אינסופי.

דוגמא-1: מילון ריק, $K_{fin}=\{\ D^M$ הוא סופי $\}$. האם K_{fin} גדירה?

פיתרון: נניח בשלילה ש- K_{fin} גדירה ע"י קבוצת פסוקים Σ. גודל התחום במבנים עבור Σ אינו חסום ולכן לפי המשפט, קיים מבנה M המספק את Σ כך ש- D^M אינסופי. $M\notin K_{fin}$ בסתירה לכך ש- Σ מגדירה את K_{fin}.

דוגמא-2: $\tau=\left\langle R(\circ,\circ)\right\rangle$. $K_{eq}=\{M \mid\ R^M$ הוא יחס שקילות $\}$. האם K_{eq} גדירה?

פיתרון: $\alpha_{ref}=\forall v_1 R(v_1,v_2)$, $\alpha_{sym}=\forall v_1\forall v_2\left(R(v_1,v_2)\to R(v_2,v_1)\right)$,

$\alpha_{tz}=\forall v_1\forall v_2\forall v_3\left(R(v_1,v_2)\wedge R(v_2,v_3)\to R(v_1,v_3)\right)$. $\Sigma_{eq}=\left\{\alpha_{ref},\alpha_{sym},\alpha_{tz}\right\}$.

דוגמא-3: $K_{eq-\inf}=\{M \mid\ R^M$ יחס שקילות וכל מחלקת שקילות היא אינסופית $\}$.

פיתרון: $\Sigma_{eq-\inf}=\Sigma_{eq}\cup\{\alpha_n \mid n\geq 2\}$.

דוגמא-4: $K_{eq-fin}=\{M \mid\ R^M$ יחס שקילות וכל מחלקת שקילות היא סופית $\}$.

פיתרון: הקבוצה אינה גדירה.