גיאומטריה אנליטית במישור

עקומים ריבועיים במישור

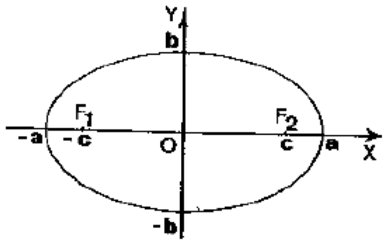
מעגל:

הגדרה גיאומטרית: מקום גיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחק קבוע R מנקודה נתונה $A(a,b)$ נקרא מעגל. R - רדיוס המעגל ו- A מרכז המעגל.

משוואת המעגל: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$

אליפסה:

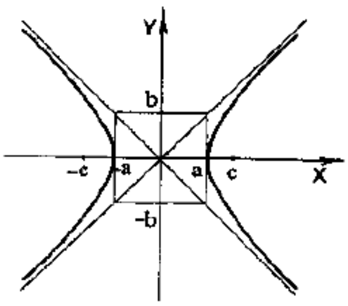
הגדרה גיאומטרית: מקום גיאומטרי של נקודות שעבורן סכום המרחקים לשתי נקודות נתונות F_1,F_2 (מוקדים) הוא מספר קבוע הנתון מראש.



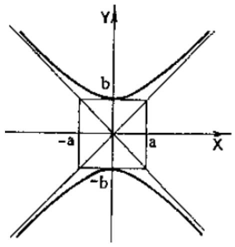
משוואה קנונית: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

היפרבולה:

הגדרה גיאומטרית: המקום הגיאומטרי של נקודות שעבורן הפרש המרחקים לשתי הנקודות הקבועות F_1,F_2 (מוקדים) הוא מספר קבוע הנתון מראש.



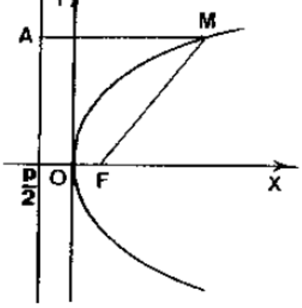
משוואה קנונית: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ אסימפטוטות: $y=\dfrac{b}{a}x,\quad y=-\dfrac{b}{a}x$



היפרבולה צמודה: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

פרבולה:

הגדרה גיאומטרית: מקום גיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודה הקבועה F (מוקד) ומקו ישר נתון (מדריך). פרבולה נקראת קנונית אם המוקד נמצא על ציר- x, המדריך ניצב לציר ה- x והמוקד והמדריך נמצאים שניהם באותו מרחק מהראשית



משוואה קנונית: $\boxed{y^2=2px}$ כאשר $F(\frac{p}{2},0)$ והמדריך: $x=\dfrac{p}{2}$

משוואת המשיק: $yy_0=(x+x_0)$ משיק לפרבולה ב $M_0(x_0,y_0)$

משוואה המגדירה עקום ריבועי כללי: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

אלגברה של וקטורים

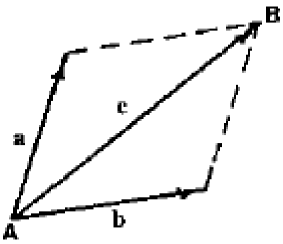
<u>וקטור האפס:</u> וקטור בעל אורך אפס.

<u>וקטור היחידה:</u> וקטור בעל אורך יחידה (1).

אורך וקטור בקואורדינאטות: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$ $\quad \vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

סכום והפרש וקטורים:

<u>פירוש גיאומטרי:</u> במישור המוגדר ע"י $\vec{a}$ ו $\vec{b}$ ניצור מקבילית ש $\vec{a}$ ו $\vec{b}$ הן צלעותיה ונקודת החיתוך היא בראשית. הסכום $\vec{a}+\vec{b}$ הוא הווקטור היוצא מהראשית ומהווה את אלכסון המקבילית.



אורך הווקטור (ע"פ משפט הקוסינוסים): $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha}$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos\alpha}$$

בקואורדינאטות: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}$

כפל וקטור בסקלר:

<u>פירוש גיאומטרי:</u> $\alpha\in\mathbb{R}$ ו $\vec{a}$ ווקטור. $\alpha\vec{a}$ הוא ווקטור שאורכו: $|\alpha||\vec{a}|$ וכיוונו ככיוון $\vec{a}$ אם $\alpha>0$ ומנוגד מגמה ל $\vec{a}$ אם $\alpha<0$.

<u>תכונות:</u>

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
3. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$
4. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
5. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

בקואורדינאטות: $\alpha\vec{a}=\alpha a_1\hat{i}+\alpha a_2\hat{j}+\alpha a_3\hat{k}$

צירוף ליניארי של וקטורים:

- הוקטורים $a_1, a_2, \dots, a_n$ תלויים ליניארית אם קיימים מספרים ממשיים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ שלא כולם אפס כך שהצירוף הליניארי שלהם הוא אפס: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$.
- שני וקטורים תלויים ליניארית אם ורק אם הם נמצאים על ישרים מקבילים.
- שני הוקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ **קולינאריים** אם הם נמצאים על ישרים מקבילים.
- שני הוקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ קולינאריים אם"ם קיים מספר $\alpha \neq 0$ כזה ש $a = \alpha b$
- יהיו $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ שני וקטורים לא קולינאריים, אזי כל וקטור הנמצא במישור הנוצר על ידם ניתן להציג באופן יחיד בצורה: $\vec{u} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$
- שלושה וקטורים מונחים על מישור אחד אם"ם הם תלויים ליניארית.
- שלושה וקטורים נקראים **קופלנריים** אם קיימים שלושה וקטורים השווים להם והמונחים על מישור אחד.
- שלושה וקטורים אינם קופלנריים אם"ם הם לא תלויים ליניארית.

מכפלה סקלרית:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

בקואורדינאטות: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

הזווית בין שני וקטורים: $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$

- שני וקטורים a ו b מאונכים אחד לשני אם"ם $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- מכפלה סקלרית היא מכפלת אורך אחד הוקטורים בהיטל הוקטור השני עליו.
- מכפלה סקלרית אינה תלויה בבחירת מערכת הצירים.

<u>תכונות:</u>

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
3. $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \alpha \vec{a} \cdot \vec{b}$
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
6. $|\vec{a} \cdot \vec{a}| = |\vec{a}|^2$

<u>היטל של וקטור $\vec{a}$ על וקטור $\vec{b}$:</u> $\vec{P} = |\vec{a}| \cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$, $|\vec{P}| = |\vec{a}| \cdot |\cos\alpha|$

<u>אי-שיוויון קושי שוורץ:</u> $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ <u>אי-שיוויון המשולש:</u> $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

מכפלה וקטורית:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

- $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha$
- $\vec{a}\times\vec{b}$ מאונך למישור הוקטורים $\vec{a}$ ו $\vec{b}$ בכיוון ע"פ חוק יד ימין.
- $|a\times b|^2=|a|^2\cdot|b|^2\cdot\sin^2\alpha$
- המכפלה הוקטורית איננה תלויה במערכת הצירים.

תכונות:

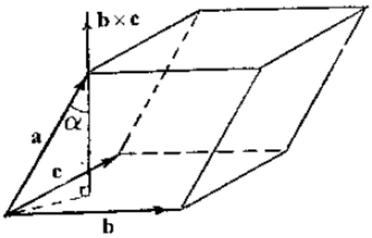
1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (החלפת שורה משנה סימן בדטרמיננטה).
2. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
4. $\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$
5. $|\vec{a}\times\vec{b}|+(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$
6. $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$

דוגמאות גיאומטריות:

- $|\vec{a}\times\vec{b}|$ הוא שטח המקבילית במרחב הבנויה על הוקטורים $\vec{a}$ ו $\vec{b}$
- שטח המשולש ABC שווה למחצית שטח המקבילית הבנויה על הוקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו $\overrightarrow{BC}$ ולכן $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

מכפלה מעורבת:

פירוש גיאומטרי: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ סקלר שערכו המוחלט שווה לנפח המקבילון הבנוי של שלושת הוקטורים. (שטח הבסיס שווה ל $|\vec{b}\times\vec{c}|$ והגובה שווה ל $|\vec{a}|\cdot|\cos\alpha|$).



- $a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
- אם $\vec{a}$ הוא ק"ל של $\vec{b}$ ו $\vec{c}$ אז $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

גיאומטריה אנליטית במרחב

המישור במרחב

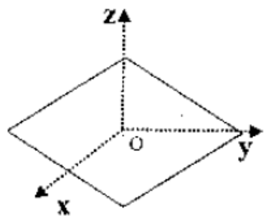
הגדרה כללית:

<u>משוואת המישור:</u> $Ax+By+Cz+D=0$

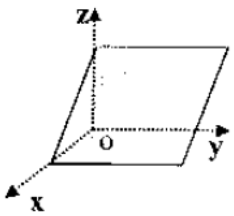
<u>וקטור הנורמל למישור:</u> $\overrightarrow{N}=(A,B,C)$

צורה נוספת: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (המישור העובר דרך הנקודה (x_0,y_0,z_0) ומאונך ל (A,B,C)).

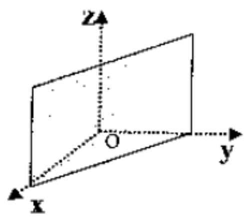
מקרים מיוחדים של משוואת המישור:



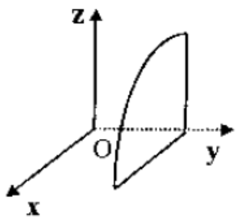
$\mathrm{By}+\mathrm{Cz}+\mathrm{D}=0$



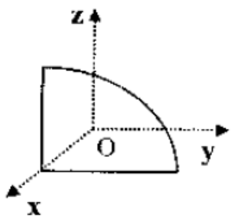
$\mathrm{Ax}+\mathrm{Cz}+\mathrm{D}=0$



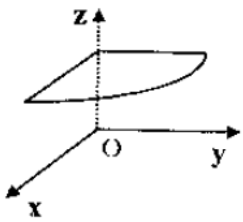
$\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{D}=0$



$\mathrm{By}+\mathrm{D}=0$



$\mathrm{Ax}+\mathrm{D}=0$



$\mathrm{Cz}+\mathrm{D}=0$

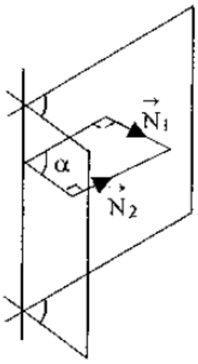
מרחק מנקודה למישור:

מרחק מנקודה (x_0,y_0,z_0) למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא: $\boxed{d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

מישורים מקבילים:

המישורים $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ו- $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ מקבילים אם ורק אם הוקטורים הנורמלים שלהם מקבילים, כלומר: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ (הוקטורים הנורמלים תלויים ליניארית).

זווית בין מישורים:



הזווית בין מישורים לא מקבילים שווה לזווית בין הנורמלים $\vec{N_1}$ ו $\vec{N_2}$ ולכן:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}|}{|\vec{N_1}|\cdot|\vec{N_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$

הישר במרחב

הגדרה כללית:

משוואת הישר העובר דרך הנקודה (x_0,y_0,z_0) ומקביל לכיוון הוקטור (A,B,C)

משוואה פרמטרית: $\boxed{\begin{cases}x=x_0+At\\ y=y_0+Bt\\ z=z_0+Ct\end{cases}}$ משוואה קנונית: $\boxed{t=\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}}$

(אם אחד המספרים בוקטור הכיוון שווה לאפס נקבל למשל: $\frac{x-x_0}{A}=\frac{z-z_0}{C}, y=y_0$).

ישר העובר דרך שתי נקודות:

(x_1,y_1,z_1) ו- (x_2,y_2,z_2): $\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$

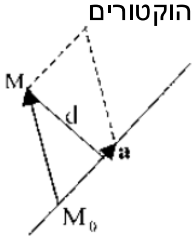
הערה: אם $x_1=x_2$ אז מקדם וקטור הכיוון הוא אפס, והישר הוא במישור שמקביל ל yz.

ישר כחיתוך של שני מישורים:

שני מישורים שאינם מקבילים, נחתכים לאורך קו ישר. ולכן מערכת המשוואות
$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ היא גם משוואה של קו ישר. קו החיתוך של המישורים נמצא בכל אחד
מהם ולכן מאונך לשני הנורמלים למישורים. ולכן וקטור הכיוון של ישר החיתוך הוא: $\vec{a}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}$
ופיתרון כלשהו של מערכת משוואות המישורים הינו נקודה על ישר החיתוך.

מרחק נקודה מישר:

M נקודה מחוץ לישר. אז נעביר שני וקטורים מ M_0 נקודה משותפת על הישר, אחד $\vec{a}$ בכיוון הישר
והשני אל הנקודה: $\overrightarrow{M_0M}$. המרחק המבוקש d הינו גובה של המקבילית הבנויה על הוקטורים
האלה. כלומר: שטח המקבילית חלקי אורך הבסיס. ומכך נקבל: $\boxed{d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}}$



מצב הדדי של ישרים במרחב:

1. ישרים מקבילים (ניתן לחשב מרחק ביניהם)
2. ישרים נחתכים (ניתן למצוא נקודת חיתוך)
3. ישרים מצטלבים (ניתן למצוא מרחק ביניהם).

תנאי לכך ששני ישרים לא מקבילים יחתכו: $M_1M_2\cdot(a_1\times a_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ k_1 & m_1 & n_1 \\ k_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

כאשר M_1,M_2 הן נקודות על שני הישרים ו $\vec{a_1}=(k_1,m_1,n_1),\ \vec{a_2}=(k_2,m_2,n_2)$ הם וקטורי הכיוון של הישרים.

זווית בין ישרים:

הזווית בין שני וקטורי הכיוון של הישרים: $\boxed{\cos\alpha=\frac{\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}}{|\vec{a_1}||\vec{a_2}|}}$. מאונכים $\leftrightarrow \cos\alpha=0$

מרחק בין ישרים:

ממשוואות הישרים יש לנו נקודה על כל ישר P,Q ווקטור כיוון $\vec{a}$ ו $\vec{b}$. בונים מקבילון שצלעותיו מקבילות לוקטורי הכיוון ול $\overrightarrow{PQ}$ וגובה המקבילון הוא המרחק המבוקש. גובה=נפח/שטח בסיס ולכן:

$$\boxed{h=\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|(\vec{a}\times\vec{b})|}}$$

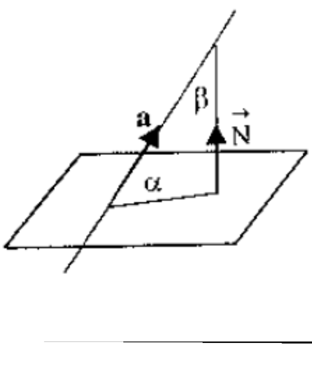
מצב הדדי בין ישר למישור:

ישר: $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ מישור: $Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{a}=(k,m,n)$ וקטור הכיוון $\vec{N}=(A,B,C)$ הנורמל למישור

- הישר מקביל למישור אם ורק אם $\vec{N}\perp\vec{a} \longrightarrow \vec{N}\cdot\vec{a}=0$
- הישר מאונך למישור אם ורק אם $\vec{N}\parallel\vec{a} \longrightarrow \frac{A}{k}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

<u>הזווית בין ישר למישור:</u> הזווית α בין הישר והיטלו על המישור: נחשב תחילה את הזווית בין הישר לנורמל: $\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{N}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{N}|}$ ובגלל ש $\alpha+\beta=90$ נקבל: $\sin\alpha=\cos\beta$.



<u>נקודת החיתוך בין ישר למישור:</u> משוואת הישר בצורה פרמטרית:

$x=x_0+kt,\ \ y=y_0+mt,\ \ z=z_0+nt$ נציב במשוואת המישור:

$Ax_0+By_0+Cz_0+(Ak+Bm+Cn)t=0$. חילוץ t מהמשוואה ייתן את את נקודת החיתוך כאשר נציב אותו במשוואת הישר.

מבוא לפונקציות ולהעתקות

הגדרות ושימושים גיאומטריים

באופן כללי נדבר על ההתאמה: $f:D\subseteq R^n \to R^m$

<u>פונקציה של n משתנים:</u> $m=1$

<u>העתקה:</u> $m>1$

<u>תחום הגדרה:</u> D- לכל נקודה ב-D מתאים מספר סקלר ב- R^m.

<u>טווח:</u> אוסף כל הערכים של הפונקציה f.

<u>קווי גובה:</u> תהי $z=f(x,y)$ פונקציה בשני משתנים. לאוסף כל הנקודות (x,y) במישור אשר מקיימות את השוויון $f(x,y)=C$ (C-קבוע) נקרא קו גובה של $z=f(x,y)$.

<u>חתכים:</u> קווי החיתוך של המשטח במרחב עם מישורים שונים.

<u>הערות:</u>

- קווי גובה הם בתחום ההגדרה והחתכים הם על הגרף עצמו.
- החתכים מאפשרים לקבל תמונה חלקית של צורת המשטח, כדי לקבל תמונה מדויקת יותר מוצאים חיתוך שלו עם המישורים yz ו-xz.

<u>משטחי רמה:</u> אוסף כל הנקודות (x,y,z) במרחב אשר מקיימות את השוויון $f(x,y,z)=C$ נקרא משטח רמה של $u=f(x,y,z)$.

משטחים ריבועיים

<u>הגדרה:</u>

אוסף כל הנקודות $(x,y,z)\in R^3$ המקיימות את המשוואה: $F(x,y,z)=0$. משטח שמשוואתו היא ריבועית במשתנים x,y,z נקרא: <u>משטח ריבועי</u>.

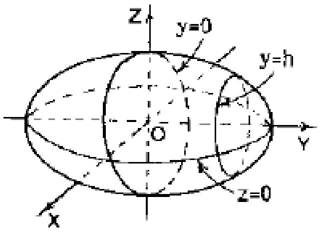
<u>משפט:</u> כל פולינום ממעלה שנייה ב- x,y,z , ניתן לבצע בו שינוי משתנים ולהביאו לאחת מהצורות הבאות: $Ax^2+By^2+Cz=0$ $\quad Ax^2+By^2+Cz^2=0$ $\quad Ax^2+By^2+Cz^2=1$.

<u>פני כדור:</u>

<u>תיאור פרמטרי:</u> $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$

פני כדור שמרכזו בנקודה (x_0,y_0,z_0) ורדיוס R

אליפסואיד:



תיאור פרמטרי: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0}$

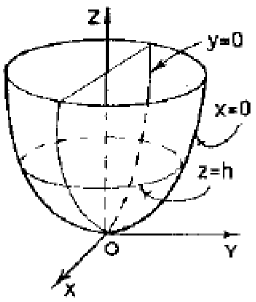
עבור $a=b=c$ נקבל את הספירה הכדורית.

מתוך המשוואה רואים כי: $|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c$ כלומר, המשטח חסום בתוך תיבה.

המשטח סימטרי ביחס לכל אחד ממישורי המערכת.

חתכים: עם הצירים: $x=\pm a,\ \ y=\pm b,\ \ z=\pm c$

פרבלואיד אליפטי:



תיאור פרמטרי: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}}$.

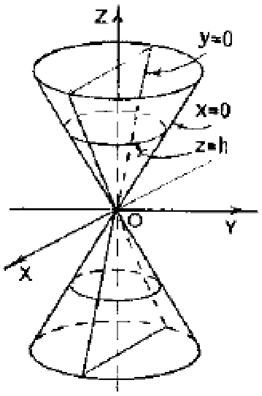
אם $c>0$ אז המשטח הוא בחצי המרחב $z\ge 0$, לא חסום והולך לאינסוף.

סימטרי ביחס ל $x=0,\ y=0$

חתכים: עם הצירים: $x=y=z=0$

עם משטחים מקבילים למישורי הקואורדינאטות: $z=d\ge 0$ - אליפסות. $x=d,\ \ y=d$ - פרבולות.

קונוס (חרוט) אליפטי:



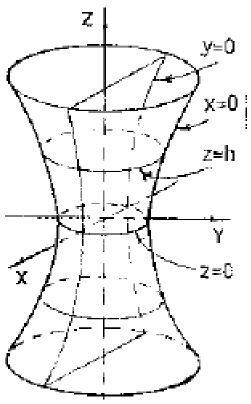
תיאור פרמטרי: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, a,b,c>0}$

המשטח לא חסום, חותך את הצירים רק בנקודה $(0,0,0)$. סימטרי ביחס לכל אחד ממישורי הקואורדינאטות.

הערה: החרוט החד-צדדי שמשוואתו: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ איננו משטח ריבועי כי בגלל הופעת השורש המשוואה שלו איננה פולינום.

חתכים: $z=d$ - אליפסות, $x=0,\ \ y=0$ - שני קווים ישרים.

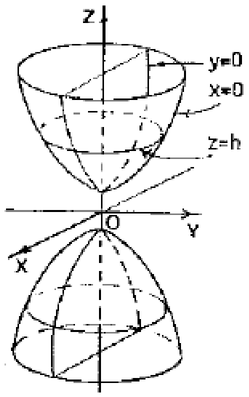
היפרבולואיד חד יריעתי:



תיאור פרמטרי: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$

המשטח סימטרי ביחס לכל אחד ממישורי המערכת.

חתכים: $z=d$ - אליפסות, $x=d,\ \ y=d$ - היפרבולות.

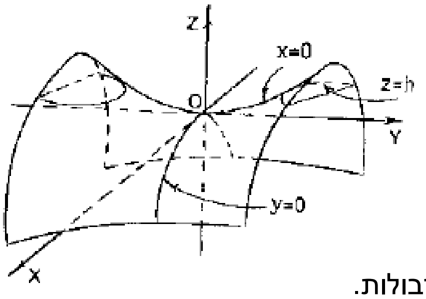


היפרבולואיד דו-יריעתי:

תיאור פרמטרי: $\boxed{\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

סימטרי ביחס לכל מישורי הקואורדינאטות. המשטח קיים רק עבור $|z|\geq c$.

חתכים: $z=d$ - אליפסות, $x=0,\ y=0$ - היפרבולות.



פרבלואיד היפרבולי:

תיאור פרמטרי: $\boxed{\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c},a,b,c>0}$.

המשטח סימטרי ביחס ל $x=0$ ו-$y=0$ בלבד.

חתכים: $z=0$ - שני קווים, $z=d>0$ - היפרבולות, $x=0,\ y=0$ - פרבולות.

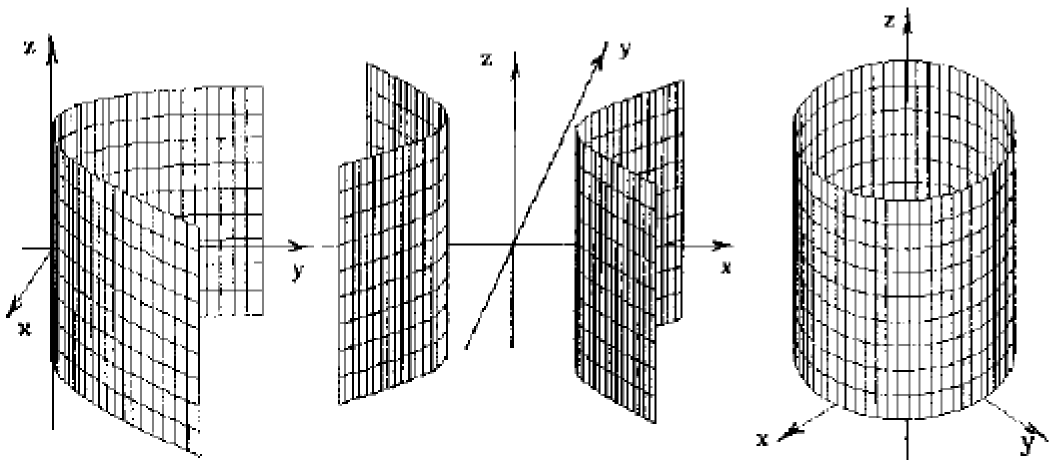
משטחים גליליים

הגדרה:

משטח שנתון ע"י פונקציה של 2 משתנים בלבד.

*במישור משוואה זו- $x^2+y^2=R^2$ מתארת מעגל, במרחב זהו משטח גלילי.

*כל משוואה שחסרה בה קואורדינאטה אחת, במרחב תתאר משטח גלילי שצירו מקביל לקואורדינאטה החסרה.



גליל פרבולי

$x^2=2py,(p>0)$

גליל היפרבולי

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

גליל אליפטי

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

מבוא לעקומים במרחב

הגדרות:

עקום הוא התמונה ב- R^n של העתקה רציפה $[a,b]\to R^n$.

פרמטריזציה של העקום: $\boxed{\vec{c}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}=\left(x(t),y(t),z(t)\right)}$

*הפרמטריזציה אינה יחידה.

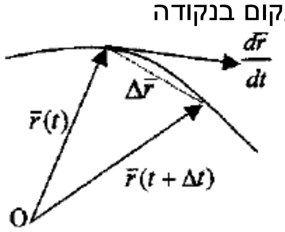
*אוסף כל הנקודות $\vec{c}(t)$, $t\in[a,b]$ נקרא עקום ו $\vec{c}(a),\vec{c}(b)$ הן נקודות הקצה שלו.

*אפשר לייצג עקום במרחב כחיתוך של שני משטחים.

*אם עקום אינו חותך את עצמו אז ההעתקה היא חח"ע ועל (לכל t מתאים x,y אחד בלבד).

משפט: תהי $\vec{c}(t)$ פרמטריזציה גזירה (כל רכיב גזיר) של העקום בתחום $a\le t\le b$ ותהי נקודה $t_0\in[a,b]$. אם $\vec{c}'(t_0)\ne 0$ אזי הוקטור $\vec{c}'(t_0)=x'(t_0)\hat{i}+y'(t_0)\hat{j}+z'(t_0)\hat{k}$ מקביל לישר המשיק לעקום בנקודה $\vec{c}(t_0)$.

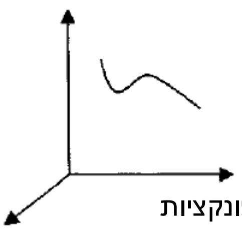
משוואת ישר המשיק לעקום: $\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}}$, ישר המשיק לעקום בנקודה (x_0,y_0,z_0) המתאימה לערך הפרמטר $t=t_0$.



דוגמא:

מצא עקום שאיננו קו ישר, שעובר בנקודה $(3,1,3)$ ושהמשיק לעקום בנקודה זו הוא הוקטור $3\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$. **פיתרון:** הישר המשיק לעקום הינו: $\begin{cases}x=3+3t\\y=1+3t\\z=3+2t\end{cases}$. נבחר t_0 כלשהי, למשל: $t_0=0$.

עלינו למצוא עקום אשר עבורו מתקיים: $x'(t_0)=3,\ \ y'(t_0)=3,\ \ z'(t_0)=2$ (רכיבי וקטור הכיוון של המשיק). העקום: $\begin{cases}x(t)=3+3t+t^2\\y(t)=1+3t+t^2\\z(t)=3+2t+t^2\end{cases}$ אכן מקיים: $x'(0)=3,\ \ y'(0)=3,\ \ z'(0)=2$ והוא גם עובר בנקודה $(3,1,3)$ עבור $t=0$.



עקום חלק

עקום חלק: עקום שיש לו ישר משיק בכל נקודה עליו או עקום שיש לו פרמטריזציה שבה פונקציות גזירות ברציפות בכל תחום הפרמטר המקיימות: $c'(t)\ne 0$

טופולוגיה בסיסית

פונקצית מרחק (מטריקה)- הגדרה:

מרחק בין שתי נקודות $M_2(y_1,y_2,...,y_n)$, $M_1(x_1,x_2,...,x_n)$ במרחב R^n הוא מספר אי-שלילי $d(M_1,M_2)$ המקיים:

1. $d(M_1,M_2)=d(M_2,M_1)$
2. $d(M_1,M_2)=0 \leftrightarrow M_1=M_2$
3. $d(M_1,M_2)\le d(M_1,M_3)+d(M_3,M_2)$ (אי-שוויון המשולש).

מטריקות:

מטריקה אוקלידית: $d(M_1,M_2)\triangleq|\overrightarrow{M_1}-\overrightarrow{M_2}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$

מטריקת הערך המוחלט: $d(M_1,M_2)\triangleq|y_1-x_1|+|y_2-x_2|+\cdots+|y_n-x_n|$

מטריקת המקסימום: $d(M_1,M_2)\triangleq\max\{|y_1-x_i|,|y_2-x_2|,...,|y_n-x_n|\}$

מרחב מטרי:

המרחב R^n שבו מוגדרת מטריקה מסוימת.

מרחב אוקלידי:

המרחב R^n שבו מרחקים נמדדים ע"י מטריקה אוקלידית.

*__המרחב המטרי $\mathbf{E_n}$__: שם ל- R^n עם המטריקה האוקלידית.

כדור n מימדי במטריקה האוקלידית: אוסף כל הנקודות $P\in R^n$ הבעלות קואורדינאטות $(x_1,...,x_n)$ המקיימות את אי-השוויון: $d(p,p_0)\le R$ נקרא: כדור n-מימדי בעל רדיוס R שמרכזו בנקודה $p_0(x_1{}^0,...,x_n{}^0)$.

- $n=1$: כדור חד-מימדי: קטע (פתוח או סגור). $|P-P_0|\le R$
- $n=2$: עיגול מלא בעל רדיוס R, $(x_1-x_1{}^0)^2+(x_2-x_2{}^0)^2\le R^2$
- $n=3$: הפנים והשפה של כדור במרחב.

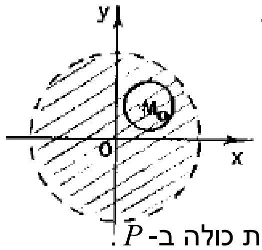
תיבה n מימדית: נתונות שתי סדרות של מספרים $\{a_i\}$ ו- $\{b_i\}$ כאשר $b_i\ge a_i$, $i=1,...,n$. אוסף כל הנקודות $P\in R^n$ בעלות קואורדינאטות $(x_1,...,x_n)$ המקיימות: $a_i\le x_i\le b_i$ נקרא תיבה n-מימדית.

*אם אי-השוויון הינו חריף אז נאמר שהכדור/תיבה הם __פתוחים__ (השפה לא נכללת).

סביבה של נקודה:

סביבה ε כדורית: כדור פתוח בעל רדיוס ε שמרכזו בנקודה $P_0(x_1{}^0,...,x_n{}^0)$. כלומר, כל הנקודות $P(x_1,...,x_n)$ המקיימות: $d(P,P_0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i{}^0)^2}<\varepsilon$.

סביבה ε תיבתית: אוסף כל הנקודות P המקיימות: $|x_i-x_i{}^0|<\varepsilon,\ i=1,2,...,n$.



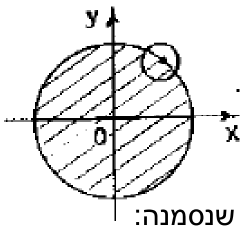
*כל סביבה ε כדורית מכילה איזושהי סביבה ε תיבתית ולהפך.

נקודות פנימיות וקבוצה פתוחה:

נקודה פנימית: P_0 נקודה פנימית של P ב- E_n אם קיימת סביבת- ε של P_0 המוכלת כולה ב- P.

קבוצה פתוחה: קבוצה $P\subseteq E_n$ תיקרא פתוחה אם כל נקודותיה הן נקודות פנימיות.

נקודת גבול: הנקודה P_0 תיקרא נקודת גבול של הקבוצה P אם בכל סביבת ε של P_0 יש נקודות של הקבוצה וגם נקודות שאינן בקבוצה.



קבוצה סגורה: אם כל נקודות הגבול של הקבוצה P שייכות לקבוצה, אז הקבוצה סגורה.

הערות:

- אם לקבוצה פתוחה P מוסיפים את כל נקודות הגבול שלה, נקבל קבוצה סגורה שנסמנה: $\overline{P}$, הסְגור של P.
- לא כל קבוצה חייבת להיות סגורה או פתוחה.

חסימות:

קבוצה חסומה: P היא קבוצה חסומה אם קיים כדור בעל רדיוס סופי המכיל את הקבוצה.

קשירות:

קו רציף: אוסף נקודות ב- R^n שהן בעלות קואורדינאטות $x_1,...,x_n$ שהן פונקציות רציפות של פרמטר t, $x_i=\varphi_i(t),\ \alpha\le t\le\beta,\ i=1,2,...,n$.

קשירות: נתונות שתי נקודות $P_1(x_1',...,x_n'),\ \ P_2(x_1'',...,x_n'')$, $P_1,P_2\in P$. נאמר שאפשר לחבר את שתי הנקודות ע"י קו רציף L אם קיים קו רציף כך ש:

$$x_1'=\varphi_1(\alpha),\ x_2'=\varphi_2(\alpha),...,\ x_n'=\varphi_n(\alpha)$$

$$x_1''=\varphi_1(\beta),\ x_2''=\varphi_2(\beta),...,\ x_n''=\varphi_n(\beta)$$

P תיקרא קבוצה קשירה אם כל שתי נקודות מהקבוצה ניתן לקשר בעזרת קו רציף הנמצא כולו בקבוצה.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה.

מבוא להגדרת הגבול

<u>סדרה של נקודות:</u> סדרת נקודות P_n ב- R^k היא סדרה של k-יות $\{x_1^{(n)},...,x_k^{(n)}\}$.

<u>הגדרת הגבול:</u> הנקודה $\vec{x}_0 \in R^k$ היא גבול של הסדרה P_n אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n \geq N(\varepsilon)$ מתקיים: $d(P_n, \vec{x}_0) < \varepsilon$.

<u>משפט (הכללה של ההגדרה הישנה לסדרות):</u> סדרת נקודות $\{P_n\}$ מתכנסת לנקודה $\vec{x}_0$ אם ורק אם k סדרות הקואורדינאטות $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, ..., \{x_k^{(n)}\}$ שלה מתכנסות לקואורדינאטות $x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0$ של הנקודה $\vec{x}_0$ בהתאמה.

x_0 נקראת גם <u>נקודת הצטברות</u>.

<u>משפט בולצאנו-ויירשטראס:</u> כל סדרה חסומה ואינסופית של נקודות ב- E_k מכילה תת-סדרה המתכנסת לגבול. במילים אחרות: אם קבוצה U <u>מכילה תת-קבוצה אינסופית וחסומה</u> V, אז יש ב-U נקודת הצטברות של V.

<u>משפט:</u> קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא <u>מכילה את כל נקודות ההצטברות</u> שלה.

<u>קבוצה קומפקטית:</u> קבוצה שבה כל סדרות קושי מתכנסות לגבול (סופי, ששייך למרחב). ב- R^n <u>כל קבוצה סגורה וחסומה היא קומפקטית</u>.

הרכבה של פונקציות:

<u>הגדרה:</u> תהי $u = f(x_1,...,x_k)$ מוגדרת מעל הקבוצה $\{x\} \in E_k$. נניח שנתונות k פונקציות $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_m),\ (t_1,...,t_m) \in \{N\}$ בעלות טווח המוכל בקבוצה $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. נגדיר פונקציה מורכבת: ϕ התלויה ב-$(t_1,...,t_m)$ המוגדרת מעל $\{N\} \in \{E_m\}$ לפי הכלל:

$$\boxed{\phi(t_1,...,t_m) = f(\varphi_1(t_1,...,t_m), \varphi_2(t_1,...,t_m), ..., \varphi_k(t_1,...,t_m))}$$

<u>**דוגמאות:**</u>

1. מסלול: $[a,b] \to R^2,\ \ \vec{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ [a,b] \to$. הפונקציה $f: R^3 \to R^2$ מוגדרת על קבוצה הגדולה מהתמונה של $[a,b]$.

$f(x(t), y(t), z(t)) = \left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}, z(t)\right)$. אם נסתכל על $f(x(t), y(t), z(t))$ כאשר $t \in [a,b]$ זה ייתן לנו את ההתנהגות של f על עקום.

2. $f: D \subseteq R^n \to R$. בוחרים סדרה $\{P_n\} \subseteq D$, אז אפשר לדבר על סדרה חדשה: $f(P_n)$.

גבול, רציפות וגזירות

גבול

הגדרה כללית:

תהי פונקציה $f: A \subseteq R^n \to R^m$ מוגדרת בסביבת הנקודה $x_0(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_k{}^0)$ פרט אולי, לנקודה $\vec{x}_0$ עצמה. A קבוצה פתוחה.

1. נאמר ש $\vec{L}$ הוא גבול הפונקציה $f(\vec{x})$ כאשר $\vec{x} \to \vec{x}_0$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל נקודה $\vec{x}$ המקיימת: $0 < d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta$ מתקיים: $d(f(\vec{x}), \vec{L}) < \varepsilon$, כאשר המרחק d נמדד ע"פ אחת המטריקות (סביבה ריבועית/סביבה מעגלית).
2. לכל סביבה N של L קיימת סביבה u של x_0 כך שאם $x \in A,\ x \in u$ אז: $f(\vec{x}) \in N$.

סימון: $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1{}^0 \\ \vdots \\ x_k \to x_k{}^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_k) = L$

פירוש גיאומטרי: לאורך כל מסלול השואף לנקודה, ערכי f שואפים לאותו גבול.

הגדרה לפי היינה:

תהיינה $\{P_n\}$ כל סדרות הנקודות המקיימות: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = x_0$ ו- $\forall n: P_n \neq x_0$, אזי: קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה כנ"ל מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = L$

משפט יחידות הגבול (ניסוח עבור $f: R^2 \to R$): אם קיים הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L$, אז לכל מסלול $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ שמקיים: $\lim\limits_{t\to t_0}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$, מתקיים: $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t), y(t)) = L$

מסקנות:

1. אם מצאנו 2 מסלולים שונים שלאורכם מקבלת הפונקציה גבולות שונים, אז אין גבול.
2. אפילו אם קיים גבול לאורך אינסוף מסלולים שונים, וכל ערכי הגבולות זהים, אין זה מבטיח קיום גבול.

גבול ביחס לקבוצה:

אם $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ כאשר: $f: A \subseteq R^n \to R,\ 1 \le i \le m$ הם הרכיבים של העתקה f אז הגבול $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ קיים אם"ם כל אחד מהגבולות הבאים קיים: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = b_i,\ 1 \le i \le m$.

דוגמאות לסתירת גבול:

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. נתבונן בהתנהגות הפונקציה הזו לאורך $x(t)=t,\ \ y(t)=kt$. כאשר $t\to 0$. $\lim\limits_{t\to 0} f(x(t),y(t))=\lim\limits_{t\to 0} f(t,kt)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\cdot kt}{t^2+k^2t^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$.

   ערך הפונקציה שווה ל- $\dfrac{k}{1+k^2}$ על כל הקרן, כלומר, ערך הגבול תלוי בכיוון השאיפה ל-0 (k הוא השיפוע של קו ישר) ולכן אין גבול.

2. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. נבדוק שוב את התנהגות הפונקציה לאורך הקרניים:

   $\lim\limits_{t\to 0} f(t,kt)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2\cdot kt}{t^4+k^2t^2}=\dfrac{kt}{t^2+k^2}=0$ לכל ערך של k . נתבונן במסלול:

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(t,kt^2)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{t^2kt^2}{t^4+k^2t^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$. מצאנו שני מסלולים שלאורכם הפונקציה מקבלת גבולות שונים: 1. קרן- הגבול הוא אפס. 2. פרבולה עם $k=1$ שם הגבול הוא $1/2$.

אריתמטיקה של גבולות:

$f,g:A\subseteq R^n\to R^m$. אם $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=L_1$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})=L_2$, $k\in R$ אז:

- $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left(f(\vec{x})\pm kg(\vec{x})\right)=L_1\pm k\cdot L_2$
- אם $m=1$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\cdot g(\vec{x})=L_1\cdot L_2$ (L_1,L_2 הם סקלרים).
- אם $g(\bar{x})\neq 0, L_2\neq 0$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}=\dfrac{L_1}{L_2}$

שיטות עיקריות לחישוב גבולות:

1. כלל הסנדוויץ' ע"י שימוש באי-שוויונים.
2. משפטים של גבולות מחדו"א 1-לדוגמא: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
3. שימוש באי-השוויון: $\left|\dfrac{ab}{a^2+b^2}\right|\le\dfrac{1}{2}$
4. אם ניתן לרשום $f(x,y)=g(x,y)\cdot h(x,y)$ כאשר g חסומה בסביבת (x_0,y_0) ו- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y)=0$ אזי: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=0$.

משפט הקואורדינאטות הפולאריות: אם ניתן לרשום את $f(x,y)$ כ- $F(r)\cdot G(\theta)$ כאשר $F(r)\xrightarrow{r\to 0}0$ ו $G(\theta)$ חסומה, אז: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

גבולות נשנים:

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$ ו- $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$ הם גבולות נשנים.

טענה:

- אם כל אחד מהגבולות הנשנים קיים ושווה ל- L וגם הגבול הכפול קיים, אזי: כולם שווים (אם הגבולות הנשנים שונים- הגבול הכפול לא קיים).
- אם כל אחד מהגבולות הנשנים קיים והם שווים, אזי לא בהכרח הגבול הכפול קיים.

דרכים לשלילת קיום גבול:

1. אם הגבולות הנשנים שונים, כלומר: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) \neq \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$
2. בקואורדינאטות פולאריות: אם הצבנו בפונקציה את הקואורדינאטות הפולאריות וקיבלנו ערכים שונים עבור θ-ות שונות, כלומר: $\lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta_1) \neq \lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta_2)$
3. אם הגבול לפי מסלול מסוים שונה מהגבול לפי מסלול אחר.

רציפות

הגדרה:

$f: A \subseteq R^n \to R^m$ העתקה רציפה בנקודה $\vec{x}_0 \in A$ אם מתקיים:

1. f מוגדרת ב-$\vec{x}_0$
2. $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}_0)$ קיים.
3. $\boxed{\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)}$

<u>בלשון $\varepsilon-\delta$:</u> $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall x: d_x(\vec{x},\vec{x}_0)<\delta \ \Rightarrow\ d_y\left(f(\vec{x}),f(\vec{x}_0)\right)<\varepsilon$.

*פונקציה של שני משתנים יכולה להיות לא רציפה, אך רציפה לפי כל אחד מהמשתנים לחוד.

תכונות בסיסיות של העתקות/פונקציות רציפות:

- אם f,g רציפות, אזי גם הפונקציות הבאות רציפות: $f\pm g,\ \alpha\cdot f,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}\ (g\neq 0)$.
- העתקה $f: R^n \to R^m$ רציפה ב-$\vec{x}_0$ אם"ם כל אחד מרכיבי $(f_1,f_2,\dots,f_m)$ הוא פונקציה רציפה ב-$\vec{x}_0$.
- תהי $f: R^n \to R$ פונקציה רציפה ב-$\vec{x}_0$. אם $f(\vec{x}_0)\geq 0$, אזי, קיימת סביבה של $\vec{x}_0$ כך ש- $f(\vec{x})\geq 0$ בסביבה זו.

רציפות של פונקציה מורכבת:

תהיינה $f: A\subseteq R^n \to R^m$ ו- $g: B\subseteq R^m \to R^p$ ונניח כי $f(A)\subseteq B$ כך ש $g\circ f$ מוגדרת ב A.
אם f רציפה ב- $\vec{x}_0 \in A$ ו- g רציפה ב-$\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$ אזי: $g\circ f$ רציפה ב-$\vec{x}_0$.

רציפות במידה שווה:

הפונקציה $f(x)$ נקראת רציפה במידה שווה בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ התלוי ב- ε בלבד, כך שלכל שתי נקודות x', x'' המקיימות $d(x',x'')<\delta$, מתקיים גם: $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$

*אם פונקציה רציפה בתחום חסום וסגור אז היא רציפה במ"ש שם.

קבוצה קשירה: $D\subset R^n$ היא קבוצה קשירה אם לכל שתי נקודות A,B ב- D ניתן למצוא עקום $\vec{r}(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ שמקיים: $\vec{r}(\beta)=B$, $\vec{r}(\alpha)=A$ וכך שכולו מוכל בתוך D.

משפט ערך הביניים: יהי D תחום קשיר ב- R^n ותהי $f: D\subseteq R^n \to R$ פונקציה רציפה בכל-D. תהיינה A,B שתי נקודות ב-D. אזי, לכל מספר m בין $f(A)$ ל- $f(B)$ ניתן למצוא נקודה אחת לפחות $c\in D$, כך ש: $f(c)=m$

משפט ויירשטראס: תהי D קבוצה קומפקטית (ב- R^n זו קבוצה סגורה וחסומה) ותהי f רציפה ב- D. אזי:

1. f חסומה ב-D.
2. f מקבלת ב-D את ערכי המינימום והמקסימום שלה.

גזירות

הגדרת הגבול בחדו"א-1:

אם הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים וסופי, אז f גזירה ב-x_0 ולגבול קוראים נגזרת.

אם f גזירה ב-x_0 אז לגרף שלה $y=f(x)$ יש ישר משיק בנקודה $(x_0, f(x_0))$ ונוסחתו: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

טענה: לישר המשיק L דרך $(x_0, f(x_0))$ יש שיפוע $f'(x_0)$. קיום הנגזרת אומר שההפרש בין הישר המשיק לגרף הפונקציה, גם אם מחלקים ב $x-x_0$, שואף לאפס, כלומר: המשיק נותן "קירוב טוב" לגרף הפונקציה (מתקרב יותר מהר מפולינום רגיל) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=0$

נגזרות חלקיות:

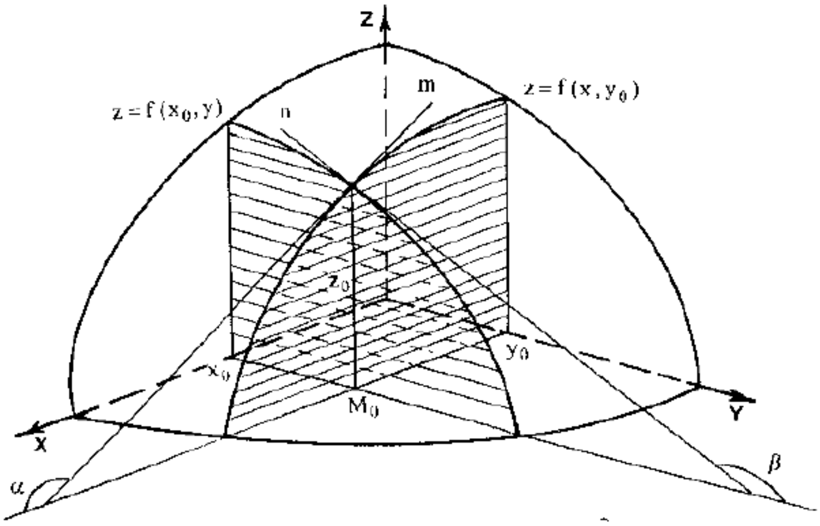
יהיה $u \subseteq R^n$ תחום ותהי $f : u \subseteq R^n \to R$ פונקציה ממשית. נסמן ב- $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ את הנגזרות החלקיות של f ביחס לכל אחד מהמשתנים אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים:

$$\boxed{1 \le i \le n, \ \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}}.$$

<u>צורת רישום נוספת:</u> $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(\vec{x} + h\varphi_i) - f(\vec{x})}{h}$.

<u>תיאור גיאומטרי:</u> נגזרת חלקית של פונקציה בשני משתנים: $z = f(x, y)$. הפונקציה z מגדירה משטח S במרחב E_3. נסמן: $z_0 = f(x_0, y_0)$. ברור שהנקודה (x_0, y_0, z_0) נמצאת על המשטח S. נקבע $y = y_0$ ונקבל: $z = f(x, y_0)$. פונקציה זו מגדירה את קו החיתוך של המישור $y = y_0$ עם המשטח S. לכן

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x_0, y_0)$ מגדירה את שיפוע המשיק m בנקודה (x_0, y_0, z_0) לעקום $z = f(x, y_0)$ ו-, כלומר, $f_x'(x_0, y_0) = \tan \alpha$, $f_x'(x_0, y_0)$ מתארת את קצב השתנות הפונקציה $z = f(x, y)$ בכיוון ציר x.



באופן דומה $f_y'(x_0, y_0)$ מתארת את קצב השתנות הפונקציה $z = f(x, y)$ בכיוון ציר ה- y ושווה ל $\tan \beta$.

משוואת המשיק m: $\boxed{z - z_0 = f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)}$.

משוואת המשיק n: $\boxed{z - z_0 = f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$

משוואת המישור דרך הישרים הנ"ל: $\boxed{z - z_0 = f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$

רציפות ונגזרות חלקיות:

1. קיום הגבול $\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$ לא גורר דבר, בפרט לא את קיום הגבול $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$
2. לא בהכרח: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. אם כן, אז הנגזרת החלקית רציפה שם.
3. אם יש לפונקציה נגזרת חלקית בנקודה מסוימת- <u>זה לא גורר רציפות הפונקציה בנקודה.</u>

גזירות (דיפרנציאביליות):

<u>תוספת לפונקציה:</u> בנקודה (x_0,y_0) ניתן ל- x תוספת Δx ול- y תוספת Δy. נקבל תוספת לפונקציה Δz באותה נקודה: $\boxed{\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}$

<u>הגדרה-1:</u> תהי $f:D\subseteq R^2\to R$ פונקציה. נאמר ש- f גזירה (דיפרנציאבילית) בנקודה פנימית $(x_0,y_0)\in D$ אם ורק אם את Δz ניתן להציג בצורה הבאה:

$$\boxed{\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y}$$

כאשר A,B מספרים קבועים ו- $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$, $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0,$

<u>הגדרה-2:</u> נסמן: $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. ברור ש $\rho\to 0$ כאשר $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$ ולהפך.

נרשום: $\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\rho\left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)$, נסמן: $\varepsilon=\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}$. הפונקציה גזירה בנקודה (x_0,y_0) אם את התוספת הכללית שלה Δz ניתן להציג בצורה הבאה:

$\boxed{\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho}$ כאשר A,B קבועים ו- $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0,$

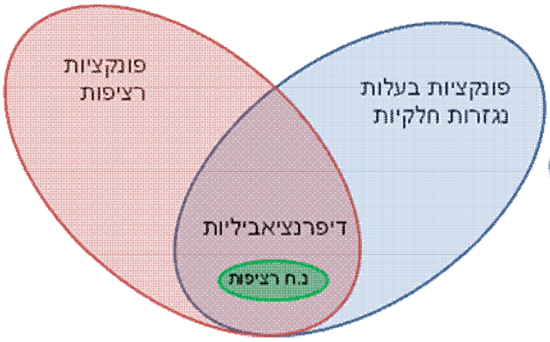
<u>ההגדרה הכללית ל-n משתנים:</u> נאמר ש f גזירה (דיפרנציאבילית) ב- $(x_1{}^0,x_2{}^0,\dots,x_n{}^0)\in D$ אם קיימים $A_1,A_2,\dots,A_n$ קבועים כך ש:

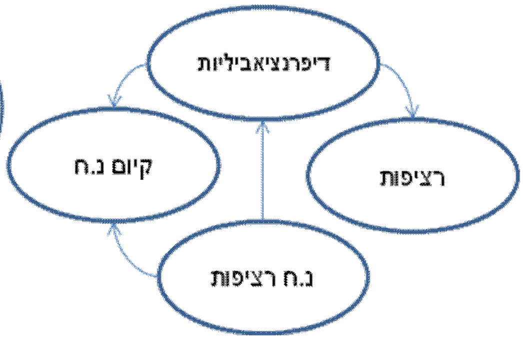
$\boxed{\Delta z=(A_1,A_2,\dots,A_n)\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}+\varepsilon(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)\cdot\rho}$ כאשר: $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^n\Delta x_i{}^2}$, $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0,$

<u>משפטים לגבי גזירות:</u>

1. אם פונקציה $z=f(x,y)$ גזירה ב- (x_0,y_0) אז: הנגזרות החלקיות קיימות בנקודה זו ו- $B=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.
2. אם f גזירה ב (x_0,y_0) אז היא רציפה באותה נקודה.
   a. אם פונקציה אינה רציפה בנקודה אז היא אינה יכולה להיות גזירה.
   b. פונקציה רציפה אינה גזירה בהכרח (גם עבור כמה משתנים).

3. אם פונקציה $z=f(x,y)$ מוגדרת בסביבת נקודה $P_0(x_0,y_0)$ ובעלת נגזרות חלקיות f_x,f_y רציפות בסביבת נקודה זו אז: f גזירה ב P_0.
   a. הקיום של נגזרות חלקיות רציפות הוא תנאי <u>מספיק ולא הכרחי</u> לגזירות.





<u>דיפרנציאביליות ומישור משיק:</u>

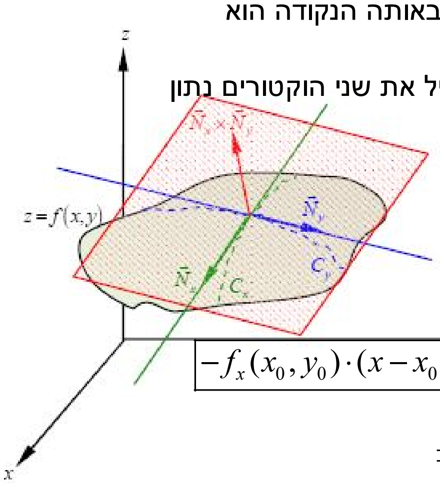
<u>מישור משיק- הגדרה:</u> π הוא מישור משיק למשטח S בנקודה N_0 אם:

1. המישור π עובר דרך הנקודה N_0.
2. לכל נקודה N על המשטח S הזווית בין המיתר NN_0 והמישור π שואפת לאפס כאשר N שואף ל- N_0

<u>הגדרה נוספת:</u> נתבונן בכל העקומים החלקים, הנמצאים על המשטח ושעוברים בנקודה N_0 עליו.
אם כל הישרים המשיקים לעקומים ב- N_0 מוכלים במישור אחד, אז זה יהיה מישור משיק למשטח ב- N_0.

<u>משפט (מישור משיק):</u> למשטח $z=f(x,y)$ קיים מישור משיק בנקודה $N_0(x_0,y_0,z_0)$ אם"ם $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0).

<u>מציאת משוואת המישור המשיק:</u> יהי C_x עקום החיתוך בין המשטח $z=f(x,y)$ ומישור $y=y_0$.
אזי הוקטור המשיק לעקום זה בנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ הוא: $\vec{N}_x=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$. יהי C_y עקום החיתוך בין המשטח ומישור $x=x_0$. אזי הוקטור המשיק לעקום זה באותה הנקודה הוא $\vec{N}_y=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$. הנורמל של המישור שעובר בנקודה הנ"ל ומכיל את שני הוקטורים נתון ע"י: $\vec{N}_x\times\vec{N}_y=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & f_x\\ 0 & 1 & f_y\end{vmatrix}=(-f_x,-f_y,1)$



ואז משוואת המישור המשיק: $\boxed{-f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+1\cdot(z-z_0)=0}$

<u>הערה:</u> למישור משיק יש שני נורמלים (מנוגדים במגמתם): $\pm(-f_x,-f_y,1)$

כלל השרשרת:

משפט-1: תהי הפונקציה $u=f(x,y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות f_x', f_y', f_z' רציפות ויהיו הפונקציות $x(t), y(t), z(t)$ גזירות בנקודה משותפת, אזי הנגזרת $\frac{du}{dt}$ קיימת ומתקיים:

$$\boxed{\frac{du}{dt}=f_x'\frac{dx}{dt}+f_y'\frac{dy}{dt}+f_z'\frac{dz}{dt}}$$

*אם u אינה גזירה, אז לא ניתן להשתמש בנוסחה.

משפט-2: תהי $u=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית ובנוסף לזה הפונקציות $x=x(t,v),\ \ y=y(t,v),$ $z=z(t,v)$ דיפרנציאביליות. אזי הפונקציה המורכבת: $u(t,v)$ גזירה חלקית לפי t ו- v ומתקיימות הנוסחאות הבאות:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}}$$

משפט לייבניץ: תהיינה $f(x,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial x}$ פונקציות רציפות במלבן R. $R=\{(x,y)\in R^2 \quad a\le x\le b;\ \ c\le y\le d\}$. תהיינה נתונות שתי פונקציות $u(x)$ ו- $v(x)$, גזירות בקטע הסגור $[a,b]$. כמו-כן: $c\le u(x)\le y\le v(x)\le d$ כאשר $a\le x\le b$. אז הפונקציה: $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy$ היא גזירה ומתקיים:

$$\boxed{F'(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}\frac{\partial f}{\partial x}f(x,y)dy+v'(x)\cdot f(x,v(x))-u'(x)\cdot f(x,u(x))}$$

נגזרת מכוונת:

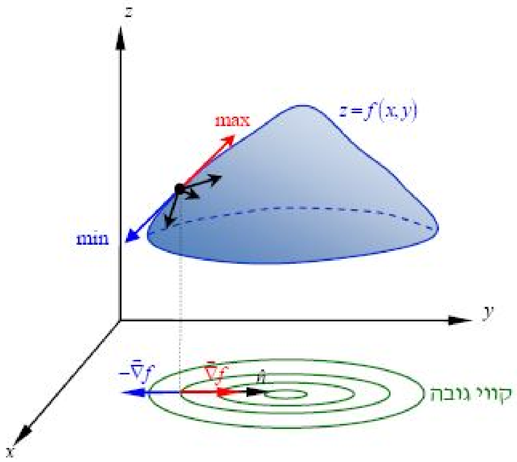
משמעותן של נגזרות חלקיות היא קצב ההשתנות של פונקציה בכיוון הצירים. בבעיות שונות יש צורך להגדיר את קצב ההשתנות של פונקציה בכיוון מסוים או בכל הכיוונים.

הגדרה: תהי f פונקציה המוגדרת בתחום D ותהיה $P_0(x_0,y_0,z_0)$ נקודה ב- D. יהי L ישר מכוון העובר דרך $\vec{P}_0$. נסמן ב- $\hat{n}$ וקטור יחידה היוצא מ P_0 בכיוון הישר. אם הגבול <u>הדו-צדדי</u>: $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{P}_0+\hat{n}\cdot h)-f(\vec{P}_0)}{h}}$ קיים וסופי, אז קוראים לו הנגזרת המכוונת של f בכיוון הישר L בנקודה P_0. <u>סימון:</u> $D_{\hat{n}}f\big|_{P_0}$, $\frac{df}{dL}(P_0)$

*הנגזרות החלקיות הן מקרים פרטיים של נגזרות מכוונת.

משפט: אם פונקציה $u=f(P)$ היא דיפרנציאבילית בסביבת הנקודה P_0 אזי הנגזרת המכוונת של $f(P)$ בנקודה P_0 לפי הכיוון $\hat{a}=\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}$ (הזוויות שיוצר הישר בכיוון זה עם צירי הקואורדינאטות) שווה ל $\boxed{D_{\hat{n}}f(P_0)=f_x'(P_0)\cos\alpha+f_y'(P_0)\cos\beta+f_z'(P_0)\cos\gamma}$

הגרדיאנט ותכונותיו:



הגדרה: נגדיר וקטור $\boxed{f(\vec{P}_0)=f_x'(\vec{P}_0)\hat{i}+f_y'(\vec{P}_0)\hat{j}+f_z'(\vec{P}_0)\hat{k}}$. לוקטור זה קוראים הגרדיאנט של f בנקודה $\vec{P}_0$. סימון: ∇f או $grad\ f$.

האופרטור נבלה: $\boxed{\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$

תוך שימוש באופרטור, ניתן לרשום:

$$\boxed{D_{\hat{n}}f(\vec{P}_o)=\nabla f(\vec{P}_0)\cdot\hat{n}}$$

משפט-1: תהי $f:R^n\to R$ גזירה בנקודה פנימית $\vec{P}_0$, אזי הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\vec{P}_0$ בכיוון $\hat{n}$ מקבלת את ערכה המקסימאלי כאשר $\hat{n}$ בכיוון שמקביל לגרדיאנט. כלומר: $\nabla f(\vec{P}_0)$: כיוון "העלייה החזקה ביותר" של הפונקציה. $-\nabla f(\vec{P}_0)$: כיוון "הירידה החזקה ביותר" של הפונקציה.

*הערך המקסימאלי של הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $\vec{P}_0$ הוא:

$$\max D_n f(P_0)=|\nabla f(P_0)|=\sqrt{f_x'^2(P_0)+f_y'^2(P_0)+f_z'^2(P_0)}$$

משפט-2: אם $f(x,y)$ בעלת <u>נ.ח רציפות</u> אזי $\nabla f(x_0,y_0)$ <u>ניצב לקו הגובה</u> שעובר ב (x_0,y_0)

אם $f(x,y,z)$ בעלת נ.ח רציפות אזי $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ <u>ניצב למשטח הרמה</u> שעובר ב (x_0,y_0,z_0) .

נגזרות מסדר גבוה:

דוגמאות לסימון (הסדר חשוב):

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}$, וגם: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$. לנגזרות שבהן גוזרים לפי יותר ממשתנה אחד קוראים: <u>נגזרות מעורבות</u>.

משפט שוורץ: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D ובעלת נגזרות חלקיות f_x,f_y,f_{xy},f_{yx} רציפות בסביבת נקודה $(x_0,y_0)\in D$ אזי: הנגזרות המעורבות שלה שוות: $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

*זהו תנאי מספיק אך לא הכרחי..

בהכללה: אם לפונקציה של n משתנים יש נגזרות חלקיות עד סדר-k (כולל) רציפות, אז ערך הנגזרת המעורבת מסדר k , אינו תלוי בסדר הגזירה.

שימושים של פונקציות גזירות

פונקציות סתומות

הגדרת פונקציה סתומה:

תהי $F(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. אם המשתנים x ו- y קשורים ע"י משוואה פונקציונאלית $F(x,y)=0$ ולכל x מקטע מסוים קיים y יחיד (או מספר ערכים של y) כך שהזוג (x,y) מקיים את המשוואה, אז משוואה זו מגדירה פונקציה $y=f(x)$ (או מספר פונקציות) כך ש- $F(x,f(x))$ שווה לאפס באופן זהותי ביחס ל- x.

פונקציה מפורשת: הפונקציה $y=\varphi(x)$ הנתונה ע"י ביטוי אלגברי.

פונקציה סתומה: הפונקציה $y=f(x)$ אם היא נתונה כפיתרון של המשוואה $F(x,y)=0$.

הערות:

- ברוב המקרים קשה מאוד למצוא צורה מפורשת של פונקציה סתומה
- לא כל משוואה בכלל מגדירה פונקציה סתומה.

משפט הפונקציות הסתומות לפונקציה ב-2 משתנים:

תהי הפונקציה $F(x,y)$ מוגדרת במלבן $D=\{(x,y),\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ ותהי $P_0(x_0,y_0)$ נקודה פנימית של המלבן המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. $F(x_0,y_0)=0$
2. $F(x,y)$ רציפה במלבן ובעלת נגזרות חלקיות $\frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial x}$ שאף הן רציפות במלבן.
3. $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$

אזי: קיימת סביבה של הנקודה P_0 שבה מוגדרת פונקציה חח"ע יחידה $y=f(x)$ כזאת שמקיימת: $F(x,f(x))=0$ לכל x בסביבת x_0 ובעלת התכונות הבאות:

1. $y_0=f(x_0)$.
2. $y=f(x)$ רציפה ב x_0 וסביבתה.
3. $y=f(x)$ גזירה ב- x_0 וסביבתה ומקיימת: $\boxed{f'(x_0)=-\frac{F_x'(x_0,y_0)}{F_y'(x_0,y_0)}}$

הערות:

- כאשר $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ אבל: $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ אז השוויון $F(x,y)=0$ מגדיר פונקציה: $x=f(y)$.
- אם גם $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$ וגם $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ אזי קיימות שתי פונקציות: $\begin{cases} y=f(x) \\ x=g(y) \end{cases}$

משפט הפונקציות הסתומות לפונקציה ב-3 משתנים:

המשוואה $F(x,y,z)$ מגדירה פונקציה $z=f(x,y)$ באם היא מקיימת את 3 התנאים הבאים:

1. קיימת נקודה $P_0(x_0,y_0,z_0)$ כך ש- $F(x_0,y_0,z_0)=0$.
2. הנגזרות החלקיות $\frac{\partial F}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial x}$ וגם הפונקציה F רציפות בסביבת (x_0,y_0,z_0).
3. אחת מהנגזרות החלקיות מסדר ראשון, למשל: $\frac{\partial F}{\partial z}$ שונה מאפס.

אזי: קיימת סביבה של הנקודה P_0 שבתוכה מוגדרת פונקציה יחידה $f(x,y)$ שמקיימת: $F(x,y,f(x,y))=0$ לכל (x,y) בסביבת (x_0,y_0) ובעלת התכונות הבאות:

1. $z_0=f(x_0,y_0)$
2. $z=f(x,y)$ רציפה ב- (x_0,y_0) וסביבתה.
3. $z=f(x,y)$ גזירה ב- (x_0,y_0) וסביבתה ומקיימת:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{F_x'(x_0,y_0,z_0)}{F_z'(x_0,y_0,z_0)},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{F_y'(x_0,y_0,z_0)}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}}$$

משפט: יהי S משטח חלק (יש לו מישור משיק). שנתון ע"י המשוואה: $f(x,y,z)=0$. יהי c עקום חלק על המשטח ותהיה $P_0(x_0,y_0,z_0)$ נקודה על העקום. אזי: הישר המשיק לעקום בנקודה P_0 מוכל במישור המשיק למשטח בנקודה P_0.

מערכת של פונקציות סתומות:

הגדרה: מערכת של m משוואות עם $n+m$ נעלמים: $F_i(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m)=0$ כאשר $1\le i\le m$. בתנאים מסוימים שיפורטו בהמשך, ניתן מתוך מערכת זו לקבוע m משתנים תלויים $y_1,y_2,\dots,y_m$ באמצעות המשתנים הבלתי תלויים $x_1,x_2,\dots,x_n$.

במשפט הפונקציות הסתומות עבור פונקציה בשני משתנים $F(x,y)$, הדרישה המרכזית הייתה ש- $F_y' \neq 0$. גם בחקירת מערכת משוואות, התנאי האנלוגי צריך לכלול דרישה דומה לגבי הנגזרות החלקיות של הפונקציות $F_1, F_2, \dots, F_m$. לשם כך נגדיר מושג חדש:

<u>**יעקוביאן:**</u> הדטרמיננטה $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$. סימון: $\boxed{J = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}}$

*זהו המכנה כאשר מחשבים את הנגזרות החלקיות לפי המשתנים הבלתי תלויים (כלל קרמר).

<u>משפט הפונקציות הסתומות עבור מערכת של-2 משוואות עם-4 נעלמים:</u>

תהיינה $\begin{cases} F(x,y,u,v) \\ G(x,y,u,v) \end{cases}$ מוגדרות בנקודה $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ וסביבתה. ונניח שמתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. $F(M_0) = G(M_0) = 0$
2. ל- F ול- G נגזרות חלקיות רציפות בנקודה M_0 וסביבתה.
3. היעקוביאן $0 \neq J = \frac{D(F,G)}{D(u,v)}$ בסביבת M_0.

<u>אזי:</u> קיימת סביבה של M_0 שבה מוגדרות שתי פונקציות יחידות $u(x,y)$ ו- $v(x,y)$ שמקיימות:

$F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = G(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$ עבור כל (x,y) בסביבת (x_0, y_0) ובעלות התכונות הבאות:

1. $v_0 = v(x_0, y_0),\ u_0 = u(x_0, y_0)$
2. $u(x,y)$ ו- $v(x,y)$ רציפות ב- (x_0, y_0) וסביבתה.
3. $u(x,y)$ ו- $v(x,y)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות ב (x_0, y_0) וסביבתה.

<u>הערה:</u> אפשר להחליט לבטא פונקציות אחרות כתלות במשתנים האחרים ואז יש צורך לשנות את התנאי השלישי עבור היעקוביאן המתאים.

דוגמא: עבור שתי פונקציות ב-4 משתנים כנ"ל, נשתמש בכלל השרשרת ונקבל שתי משוואות

ליניאריות עבור המשתנים $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$: $$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\boxed{\frac{\partial v}{\partial x}}=0\\ \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\boxed{\frac{\partial v}{\partial x}}=0\end{cases}$$. נשתמש בכלל קרמר כדי

לפתור אותן: $y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ (Δ_x-החלפת העמודה ה- x בעמודת הפתרון של המטריצה).

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=J,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & -\frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & -\frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}$$

מערכות של פונקציות הפוכות:

נביא תנאים לקיום מערכת של פונקציות הפוכות ושימושיהן להעתקות בין קבוצות במישור ובמרחב.

נתבונן במערכת הפונקציות: $y_i=f_i(x_1,x_2,\dots,x_k),\ 1\le i\le k$ שלהן היעקוביאן:

$J=\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_k)}{D(x_1,x_2,\dots,x_k)}$.

הערה: זהו מקרה פרטי של משפט הפונקציות הסתומות למערכת: $y_i-f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$

משפט ההעתקות ההפוכות: תהיה מערכת של פונקציות מהצורה f_i שהן רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות בסביבת הנקודה $M_0(x_1{}^0,x_2{}^0,\dots,x_k{}^0)$. נניח שהיעקוביאן J שונה מאפס בנקודה זו, אזי קיימת סביבה של הנקודה $N_0(y_1{}^0,y_2{}^0,\dots,y_k{}^0)$ כאשר $f_i(M_0)=y_i{}^0,\ 1\le i\le k$ שבה מוגדרת מערכת יחידה של פונקציות $x_i=g_i(y_1,y_2,\dots,y_k),\ 1\le i\le k$ ההפוכות לפונקציות f_i מהמערכת המקורית, שהן רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות בסביבת N_0.

הערה: זוהי התנהגות לוקאלית (בסביבה מסוימת בלבד).

הדטרמיננטה של המערכת ההפוכה- Δ^* מקיימת: $\boxed{\Delta^*\cdot\Delta=1}$

בעיות קיצון

אקסטרמום לוקאלי:

הגדרה: לפונקציה $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ יש מקסימום או מינימום מקומי בנקודה P_0, אם קיימת סביבה של P_0 כזאת שלכל נקודה P מסביבת P_0 מתקיים: $f(P)\le f(P_0)$ (מקסימום) או $f(P)\ge f(P_0)$ (מינימום).

משפט- תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום: אם לפונקציה $u=f(x_1,\dots,x_n)$ יש אקסטרמום בנקודה $P_0=(x_1{}^0,\dots,x_n{}^0)$ ובנוסף היא בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנקודה זו, אזי כל הנגזרות האלו שוות לאפס (הגרדיאנט גם הוא אפס).

הערות:

- המשפט בעצם אומר שאם פונקציה $z=f(x,y)$ גזירה ומקבלת מינימום או מקסימום באיזושהי נקודה, אז המישור המשיק לגרף בנקודה זו מקביל למישור XY.
- התנאי הכרחי אבל לא מספיק.
- הנגזרות החלקיות מתאפסות אם הן קיימות, ייתכן גם שאינן קיימות בנקודת אקסטרמום.
- ייתכן שכל הנגזרות החלקיות שוות לאפס וזו אינה נקודה אקסטרמום.

נקודה קריטית: נקודה P_0 היא נקודה קריטית (חשודה לאקסטרמום) אם היא עשויה להיות אקסטרמום מקומי.

1. נקודות שבהן כל הנגזרות החלקיות מהסדר הראשון קיימות ומתאפסות ($\nabla f=\vec{0}$).
2. נקודות שבהן לפחות נגזרת חלקית אחת לא קיימת.

מציאת מקסימום ומינימום מותנים:

אקסטרמום של פונקציות שהמשתנים שלהן מקיימים תנאים נוספים נקרא: **אקסטרמום עם אילוצים**.

דוגמא: נתון: $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$. חשב את ערכי האקסטרמום שלה על $x^2+y^2=4$ (האילוץ).

פיתרון- דרך א: להציב $y^2=4-x^2$ ולפתור כמו שפותרים עבור משתנה אחד.

פיתרון- דרך ב: למצוא תיאור פרמטרי של האילוץ $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$. $0\le t\le 2\pi$. מציבים לפונקציה:
$f(x,y)=(2\cos t-1)^2+4\sin^2 t=4\cos^2 t-4\cos t+1+4\sin^2 t=5-4\cos t$. מוצאים אקסטרמום של: $F(t)=5-4\cos t$, $0\le t\le 2\pi$. $F'(t)=4\sin t,\ \ F'=0\to t=0,\pi,2\pi$.
$F(\pi)=9,\ \ F(2\pi)=1$, לכן מקסימום: 9, מינימום: 1.

פיתרון- דרך ג: נמצא תיאור פרמטרי של העקום: $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $a\le t\le b$. $F(t)=f(x(t),y(t))$.

תנאי הכרחי הוא כי $F'(t)=0$. f גזירה אז אפשר להשתמש בכלל השרשרת:

$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)=\overrightarrow{grad}f\cdot r'(t)=0$. אם ל- $r(t)$ יש משיק אז התנאי ההכרחי הוא:

$\overrightarrow{grad}f\cdot r'(t)=0$ שזה למעשה אומר כי $\overrightarrow{grad}f$ ניצב למשיק לעקום.

<u>מסקנה:</u> בנקודת אקסטרמום של פונקציה $f(x,y)$ בכפוף לאילוץ $g(x,y)=0$ מתקיים: $\boxed{\nabla f \parallel \nabla g}$

<u>משפט (כופלי לגרנז'):</u> (עבור פונקציה $f(x,y)$, אילוץ אחד $g(x,y)=0$).

תהיינה $f,g:R^2\to R$ פונקציות המוגדרות בנקודה (x_0,y_0) וסביבתה וכך ש- g מקיימת:

1. $g(x_0,y_0)=0$
2. $\nabla g(x_0,y_0)\neq\vec{0}$

אם לפונקציה $f(x,y)$ יש ערך אקסטרמלי בכפוף לאילוץ $g(x,y)=0$ בנקודה (x_0,y_0) אז קיים קבוע λ (כופל לגרנז') כך שמתקיים: $\boxed{\nabla f(x_0,y_0)+\lambda\nabla g(x_0,y_0)=\vec{0}}$

<u>הערה:</u> ניתן לרשום את הפונקציה הנתונה ואת האילוצים כפונקציית לגרנז':

$\phi(x_0,y_0,\lambda)=f(x_0,y_0)+\lambda\cdot g(x_0,y_0)$ ואז לפתור: $\vec{\nabla}\phi(x_0,y_0,\lambda)=\vec{0}$ כמערכת של משוואות שלה מוסיפים את משוואות התנאים.

<u>משפט-עזר:</u> תהיינה $f,g:u\in R^3\to R$ פונקציות רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות. תהיה $\vec{x}_0\in u$ כך ש: $g(\vec{x}_0)=C$ ויהיה S משטח רמה עבור g עם C הנתון, כלומר: $g(\vec{x})=C,\ \vec{x}\in u$.

נניח כי $\vec{\nabla}g(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$. אם f על S היא בעלת מקסימום או מינימום ב- $\vec{x}_0$ אזי קיים מספר ממשי $\lambda\neq 0$ כך ש $\boxed{\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)=\lambda\cdot\vec{\nabla}g(\vec{x}_0)}$. אם g בעלת שפה, אינה משטח סגור, אז $\vec{x}_0$ יכולה להיות על שפה זו.

<u>משפט כופלי לגרנז' עבור מספר אילוצים:</u> אם משטח S מוגדר על-ידי מספר אילוצים:

$\begin{cases} g_1(x_1,\dots,x_n)=c_1 \\ \vdots \\ g_k(x_1,\dots,x_n)=c_k \end{cases}$ אז אפשר להכליל את המשפט באופן הבא:

אם ל- f יש מקסימום/מינימום ב- $\vec{x}_0$ על S הרי חייבים להיות קבועים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ כך ש:

$\boxed{\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)=\lambda_1\vec{\nabla}g_1+\dots+\lambda_k\vec{\nabla}g_k}$. כאשר: $\vec{\nabla}g_1(\vec{x}_0),\dots,\vec{\nabla}g_k(\vec{x}_0)$ הם בלתי תלויים ליניארית.

נוסחת טיילור ושימושיה

משפט טיילור לפונקציה במשתנה אחד: תהי $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה x_0.
אזי קיימת נקודה c בין x ל- x_0 כך שמתקיים:

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n}$$

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

אופרטור d: $\boxed{d=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy}$ פועל לפי הכלל: $df=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)f=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

כאשר: $d^n=d(d^{n-1})$

משפט טיילור לפונקציה בשני משתנים: תהיה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר $n+1$, בסביבת הנקודה (x_0,y_0)

$$\boxed{f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{d^j f(x_0,y_0)}{j!}+R_n}$$

ובצורה מפורשת:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)+\cdots+\frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!}$$

הערה: פתיחת הסוגריים תתבצע לפי הבינום של ניוטון.

צורת רישום נוספת:

$$\boxed{f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{r+s=1}^{n}\left.\frac{\partial^{r+s}f}{\partial x^r\partial y^s}\right|_{(x_0,y_0)}\cdot\frac{(x-x_0)^r(y-y_0)^s}{r!s!}+R_n}$$

ביטוי לשארית: $\boxed{R_n=\sum_{r+s=n+1}^{n+1}\left.\frac{\partial^{r+s}f}{\partial x^r\partial y^s}\right|_{(u,v)}\cdot\frac{(x-x_0)^r(y-y_0)^s}{r!s!}}$ כאשר (u,v) נמצאת על הישר המחבר את (x_0,y_0) עם (x,y).

אפיון נקודות קריטיות

משפט אפיון נקודות קריטיות בעזרת ההסיין- 2 משתנים: תהיה $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים, רציפה ובעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון ושני רציפות בקבוצה פתוחה וקשירה $u \in R^2$. ומתקיים: $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)=\vec{0} \Rightarrow f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$ עבור נקודה פנימית (x_0,y_0).

נסמן: $\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$

שזהו דטרמיננט של **מטריצת ההסיאן:** $H=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{vmatrix}$

1. אם $\Delta>0$ אז בנקודה (x_0,y_0) יש קיצון מקומי:
   a. עבור $f''_{xx}>0$ - מינימום.
   b. עבור $f''_{xx}<0$ - מקסימום.
2. אם $\Delta<0$ אז לפונקציה אין קיצון מקומי ב- (x_0,y_0), זו נקודת אוכף.
3. אם $\Delta=0$ אין אפשרות לקבוע את אופי הנקודה (x_0,y_0) בעזרת דיפרנציאל מסדר שני.

משפט אפיון נקודות קריטיות בעזרת ההסיין- n משתנים: תהי $u=f(x_1,\dots,x_n)$ ונניח כי יש ל- f נגזרות חלקיות מסדר-2 רציפות בסביבת הנקודה P_0. תנאי הכרחי לאקסטרמום, התאפסות כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון: $f'_{x_i}(P_0)=0$. בונים את מטריצת ההסיאן: $H=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & \cdots & f''_{x_nx_n}\end{pmatrix}$.

1. אם כל n המינורים הראשיים ב- P_0 הם חיוביים, קיים ב- P_0 מינימום מקומי.
2. אם סימניהם מתחלפים לסירוגין החל ממינוס עבור $f''_{x_1x_1}$, קיים ב- P_0 מקסימום מקומי.
3. במקרה אחר מאלה כאשר גם $\Delta\neq 0$, אז יש ב- P_0 נקודת אוכף.
4. כאשר $\Delta=0$, אין אפשרות לקבוע את אופי הנקודה.

הערה: ניתן להיעזר במטריצת ההסיאן רק לחישוב נקודות קיצון מקומיות ולא גלובליות.

דוגמא: מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה: $u=x^3+y^3-9xy+27$ וקבע את אופיין.

פיתרון: u- פולינום ב- x ו- y ולכן בעל נגזרות חלקיות עד סדר 2 לפחות- רציפות. נחפש נקודות קריטיות. צריך לפתור את המערכת: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3(x^2-3y)\Rightarrow x^2-3y=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=3(y^2-3x)\Rightarrow y^2-3x=0$$
ומקבלים: $\boxed{\begin{matrix} x_1=0 & y_1=0 \\ x_2=3 & y_2=3 \end{matrix}}$ כלומר: $(3,3)$ $(0,0)$ הן נקודות

קריטיות. נבדוק את אופיין: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-9$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$ $H_2=\begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$.

$H_2(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix},\ \Delta<0$ - נקודת אוכף.

$H_2(3,3)=\begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix},\ \Delta>0,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(3,3)}>0$ - נקודת מינימום מקומי.

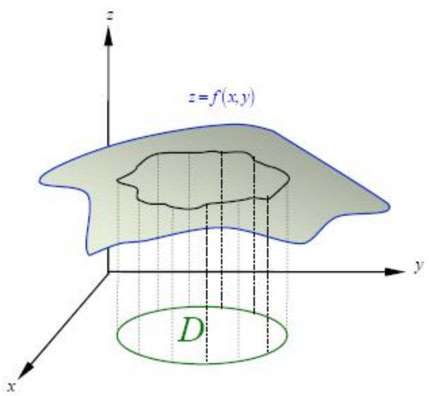
אינטגרלים כפולים ומשולשים

אינטגרל כפול

אינטגרל כפול על תחום מישורי:

יהיה נתון תחום מישורי D חסום ששפתו היא עקום חלק לחלקים (ניתן לחלקו למספר סופי של עקומים שבכל אחד מהם הוא חלק-לפרמטריזציה יש נגזרת) ועליו מוגדרת פונקציה חסומה $f(x,y)$. נחלק את התחום D לתת-תחומים D_i בעלי שטח S_i, $1\le i\le n$, ע"י ישרים המקבילים לצירים. בכל אחד מהתחומים החלקיים נבחר נקודה שרירותית (u_i,v_i) וניצור את הסכום:

$G_n=\sum_{i=1}^{n} f(u_i,v_i)$. אם הסכום G_n שואף לגבול כאשר הגדול מבין תת-התחומים הוא בעל קוטר השואף ל-0, וערכו של גבול זה אינו תלוי בחלוקה או בבחירת הנקודות (u_i,v_i), ייקרא גבול זה בשם: האינטגרל הכפול של f על התחום D. סימון: $\boxed{I=\iint f(x,y)dD}$



<u>הערה:</u> אינטגרל כפול הוא מספר. המספר מודד (חלק מהדוגמאות):

- $f(x,y)=1$: שטח התחום D.
- $f(x,y)\ge 0$: נפח התחום הגלילי הנמצא בין מישור XY וגרף הפונקציה $z=f(x,y)$.
- f פונקציית צפיפות: משקל מסה

הגדרת אינטגרביליות במלבן:

תהי $f(x,y)$ פונקציה מוגדרת במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נחלק את המלבן ע"י קווים ישרים מקבילים לצירים: $\begin{matrix} a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b \\ c=y_0<y_1<\ldots<y_M=d \end{matrix}$ בכל מלבן $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ נבחר נקודה שרירותית (u_i,v_k) ונסמן: $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\ \Delta y_j=y_{j+1}-y_j$. נבנה את הסכום: $\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} f(u_i,v_k)\Delta x_i\Delta y_j$. אם הסכום הזה שואף לגבול סופי כאשר $\max\left\{\sqrt{\Delta x_i^{\,2}+\Delta y_j^{\,2}}\right\}\to 0, N\to\infty, M\to\infty$ ללא תלות בשיטת החלוקה של התחום המלבני, אזי אומרים שהפונקציה $f(x,y)$ אינטגרבילית לפי רימן במלבן $[a,b]\times[c,d]$ ומסמנים את הגבול ע"י: $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$

<u>משפט:</u> אם $f(x,y)$ רציפה על התחום D אז f אינטגרבילית על D.

<u>תחום ששטחו אפס:</u> תחום שאפשר לכסותו עם מלבנים ששטחם קטן כרצוננו. (לכל $\varepsilon>0$ השטח החיצוני שלו- סכום המלבנים קטן מ- ε).

משפטים על שטח אפס:

1. עקום בעל פרמטריזציה גזירה ברציפות הוא בעל שטח אפס.
2. תחום הוא בעל שטח אפס אם ורק אם שפתו היא עקום בעל שטח אפס.
3. אינטגרל כפול קיים אם $f(x,y)$ חסומה ורציפה ב-D פרט למספר סופי של נקודות או עקומים ששטחם אפס.

תכונות של אינטגרל כפול:

1. תהיינה f,g פונקציות אינטגרביליות בתחום משותף D. אזי:

1.1 $\alpha f \pm \beta g$ אינטגרבילית ב-D ומתקיים:

$$\iint_D (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy \pm \beta \iint_D g(x,y)dxdy$$

1.2 $f \cdot g$ אינטגרבילית ב-D ואם $g \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-D.

1.3 אם $f \le g$ לכל (x,y) ב-D אז: $\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$

2. אם D מורכב מ-2 חלקים D' ו-D'' ו-f בעלת אינטגרל על D אז:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x,y)dxdy + \iint_{D''} f(x,y)dxdy$$

3. גם $|f(x,y)|$ אינטגרבילית בתחום-D ומתקיים: $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)dxdy|$

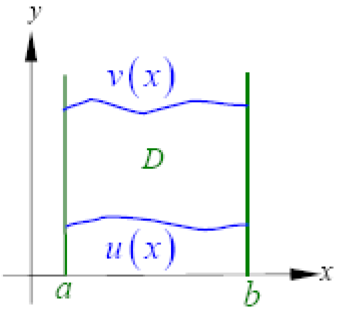
4. (משפט ערך הביניים): f אינטגרבילית בתחום-D ולכן גם חסומה. נסמן: $m \le f(x,y) \le M$. אזי: $m\iint_D dxdy \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M\iint_D dxdy$. ובפרט אם $0 \le f(x,y)$ אז: $0 \le \iint_D f(x,y)dxdy$

דרכים לחישוב אינטגרלים כפולים:

משפט פוביני: תהי פונקציה $f(x,y)$ מוגדרת ורציפה במלבן: $R=[a,b]\times[c,d]$ ויהיה קיים האינטגרל הכפול: $\iint_R f(x,y)dxdy$, כמו-כן יהיה לכל x מהקטע $[a,b]$ קיים האינטגרל: $\int_c^d f(x,y)dy$. אז מתקיים:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx}$$

הערה: גם האינטגרל הנשנה השני (סדר אינטגרציה הפוך) הינו בעל אותו ערך.



תחום y פשוט: תחום המוגבל ע"י הישרים $x=a,\ x=b$ והעקומים הרציפים $y=u(x)$ ו- $y=v(x)$ שאינם חותכים זה את זה בקטע $[a,b]$ (פרט לקצוות, שיכולים להיות משותפים).
$D=\{(x,y)\,|\,u(x)\le y\le v(x),\ a\le x\le b\}$.

*באופן דומה מגדירים תחום פשוט ביחס לציר-x.

משפט: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בתחום-D, שהוא פשוט ביחס לציר-y. ונניח:

1. $f(x,y)$ אינטגרבילית ב-D, כלומר קיים האינטגרל: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

2. לכל $a\le x\le b$ קיים אינטגרל חד מימדי: $G(x)=\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy$

אזי: $G(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ומתקיים:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b G(x)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right)dx}$$

הערה: אם התחום גם x-פשוט וגם y-פשוט אז בוחרים את האינטגרל שקל יותר לחשב.

שינוי משתנים באינטגרל כפול:

משפט: אם מערכת $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ של פונקציות רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות מעתיקה תחום D לתחום Δ חד-חד-ערכית והיעקוביאן $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$ בכל Δ, אזי:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\Delta f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\cdot|J|\,dudv}$$

הערות:

- בדומה לשינוי משתנים באינטגרל רגיל, כאן $|J|$ הוא היחס בין האלמנטים של השטח.
- משמעות של ערך מוחלט של יעקוביאן- החלפת סדר משתנים של העתקה:
$$J=\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)=-\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,u)}\right)$$

משפט: תהיה A מטריצה מסדר 2×2 ובעלת $\det A\ne 0$. תהיה T טרנספורמציה ליניארית של $R^2\to R^2$ הנתונה ע"י: $T(x)=Ax$ (כפל בסקלר). אזי:

T מעתיקה מקבילית למקבילית וקודקודים לקודקודים ואם $T(D^*)$ היא מקבילית אזי: גם D^* צריך להיות מקבילית.

דוגמאות חשובות:

העתקה ליניארית:

נגדיר העתקה ממישור UV למישור XY ע"י: $\begin{cases} x(u,v)=\alpha u+\beta v \\ y(u,v)=\gamma u+\delta v \end{cases}$,

$J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma=const$. לכן במקרה זה, היעקוביאן הוא בדיוק יחס

השטחים של התחומים: $\iint\limits_D dxdy=|J|\iint\limits_D dudv=const\cdot\iint\limits_D dudv$

העתקה מעגלית:

נגדיר העתקה ממישור (r,θ) למישור XY ע"י: $\begin{cases} x(r,\theta)=r\cos\theta \\ y(r,\theta)=r\sin\theta \end{cases}$,

$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$ ואז, על-מנת לעבור מקרטזיות למעגליות, נכפיל

ביעקוביאן: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right)\cdot r\ drd\theta$

<u>הערה:</u> ההעתקה המעגלית אינה חח"ע בכל תחום שמכיל את הראשית (הנקודה $(0,0)$ עוברת לקטע $r=0,\ 0\le\theta\le 2\pi$). בכל-זאת ניתן לבצע אינטגרציה מפני שנקודה אחת היא קבוצה בעלת שטח אפס.

מסה של תחום מישורי:

נניח שנתון תחום מישורי D (לוח) בעל צפיפות (מסה ליחידת שטח): $\sigma(x,y)$, אזי המסה של התחום תהיה: $\boxed{m=\iint\limits_D \sigma(x,y)dxdy}$

קואורדינאטות מרכז המסה: $\boxed{\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\cdot\sigma(x,y)dxdy \\ y_0&=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\cdot\sigma(x,y) \end{aligned}}$

אינטגרל משולש:

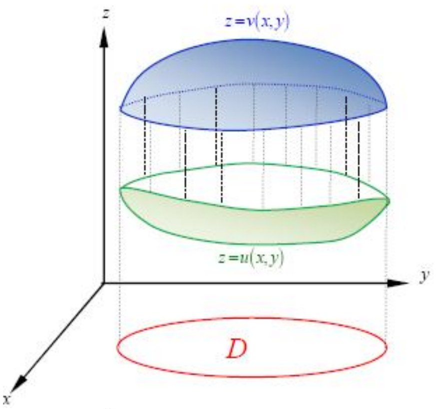
הגדרה: נגדיר אינטגרל של פונקציה $f(x,y,z)$ המוגדרת מעל גוף V. נחלק את הגוף V ל- n תת-תחומים: $v_1,\dots,v_n$ שהנפח של כל אחד מהם הוא: $\Delta v_1,\dots,\Delta v_n$. בכל אחד מתת-התחומים נבחר נקודה שרירותית: (u_i,v_i,w_i) וניצור את הסכום האינטגרלי: $\sum_{i=1}^{n} f(u_i,v_i,w_i)\Delta v_i$. אם קיים הגבול: $I=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(u_i,v_i,w_i)\Delta v_i$ (Δ - קוטר הגדול שבתת-תחומים שואף לאפס), והוא אינו תלוי בחלוקה של הגוף V ובבחירת הנקודה (u_i,v_i,w_i) אזי הוא נקרא האינטגרל המשולש של $f(x,y,z)$ בתחום V. סימון: $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

משפט: יהיה נתון תחום V חסום ועליו מוגדרת פונקציה רציפה-$f(x,y,z)$. במקרה זה קיים האינטגרל המשולש כמתואר בהגדרה.

הערה: כמו במקרה של אינטגרלים כפולים, ניתן להחליש את הדרישה של הרציפות על מספר סופי של נקודות, קווים או משטחים שנפחם קטן כרצוננו.

משפט: אם f מוגדרת ב- V וקיים: $m\le f(x,y,z)\le M$ אזי, אם ΔV מסמן את נפח התחום V, מתקיים: $m\Delta V\le\iiint\limits_V f(x,y,z)dv\le M\Delta V$. ואם f רציפה על V אזי: קיימת נקודה (x^*,y^*,z^*) כך ש: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\Delta V\cdot f(x^*,y^*,z^*)$

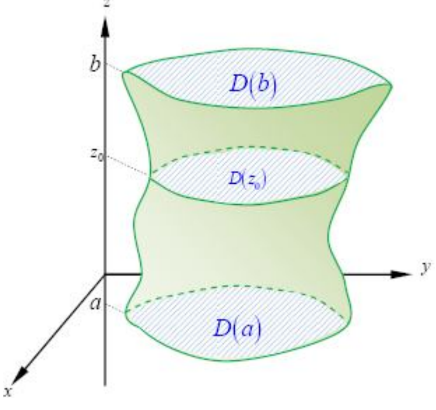
שיטות לחישוב כאינטגרל נשנה:



שיטה-1: $\iiint f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D\left(\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$

כאשר: $u(x,y)\le z\le v(x,y),\ (x,y)\in D$.

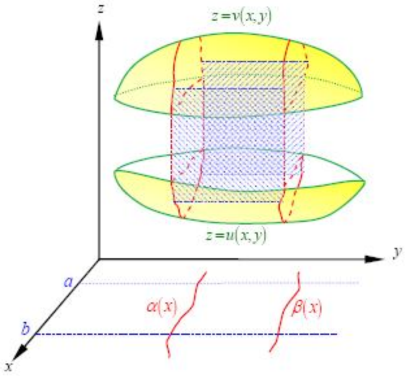
זהו תחום חסום ע"י פונקציות מלמטה ומלמעלה וע"י משטח גלילי בצדדים שהיטלו על מישור XY הוא שפת D. למעשה, עושים אינטגרציה על "אורכי הקווים" המקבילים לציר Z, שחסומים ע"י הפונקציות הנ"ל בתחום D.



שיטה-2: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b\left(\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)dxdy\right)dz$

כאשר: $a\le z\le b,\ (x,y)\in D(z)$.

עושים אינטגרציה על התחום החסום ע"י המישורים $z=a,\ z=b$ מלמטה ומלמעלה ולכל חתך של התחום עם המישור $z=const$ (תחום $D(z)$).



שיטה-3: $\iiint f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$

כאשר: $a\le x\le b,\ \ \alpha(x)\le y\le\beta(x),\ \ u(x,y)\le z\le v(x,y)$.

הערה: כאשר $f(x,y,z)\equiv 1$ משמעות האינטגרל המשולש היא הנפח שכלוא בתחום.

שינוי משתנים באינטגרל משולש:

משפט: תהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה בתחום V. ונניח שמערכת המשוואות:

$$\begin{aligned}x&=x(u,v,w)\\ y&=y(u,v,w)\\ z&=z(u,v,w)\end{aligned}$$

מעתיקה את התחום V באופן חח"ע ועל לתחום $\tilde V$., אז ניתן להפוך את המערכת ל-

$$\begin{aligned}u&=u(x,y,z)\\ v&=v(x,y,z)\\ w&=w(x,y,z)\end{aligned}$$

שמעתיקה את V על $\tilde V$:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\tilde V} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\cdot|J|\,dudvdw}$$

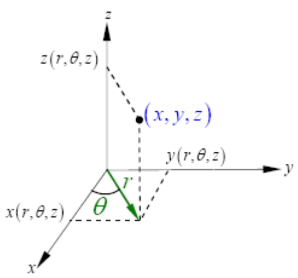
דוגמאות חשובות:

קואורדינאטות גליליות:

נגדיר העתקה ממישור (r,θ,z) למישור XYZ ע"י:

$$\begin{cases}x(r,\theta,z)=r\cos\theta\\ y(r,\theta,z)=r\sin\theta\\ z(r,\theta,z)=z\end{cases}\quad\begin{cases}0\le\theta\le2\pi\\ 0\le r\le R\\ a\le z\le b\end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta & x_z\\ y_r & y_\theta & y_z\\ z_r & z_\theta & z_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

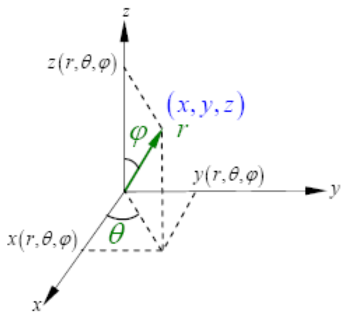


היעקוביאן מתאפס על הציר המרכזי (במקרה זה- ציר z).

קואורדינאטות כדוריות:

נגדיר העתקה ממישור (r,θ,φ) למישור XYZ ע"י:

$$\begin{cases}x(r,\theta,\varphi)=r\cos\theta\sin\varphi\\ y(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\sin\varphi\\ z(r,\theta,\varphi)=r\cos\varphi\end{cases}\quad\begin{cases}0\le\theta\le2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le R\end{cases}$$



$$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}=\cdots=r^2\sin\varphi$$

היעקוביאן מתאפס על הציר ששייך ל φ (במקרה זה- ציר z).

<u>שימושים גיאומטריים ופיסיקאליים:</u>

<u>מרכז מסה:</u> $\boxed{m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz}$. קאורדינאטות:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\cdot\rho(x,y,z)dxdydz \\ y_0&=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\cdot\rho(x,y,z)dxdydz \\ z_0&=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\cdot\rho(x,y,z)dxdydz \end{aligned}}$$

<u>מומנט אינרציה:</u> $\boxed{I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\cdot f(x,y,z)dxdydz}$

אנליזה וקטורית

אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

אורך של עקום:

הגדרה: יהי C עקום שנתון בצורה פרמטרית ע"י 3 פונקציות רציפות: $x(t), y(t), z(t)$ כאשר $a \le t \le b$. ונניח כי הן פונקציות רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות מהסדר הראשון.זה אומר שהעקום חלק (יש לו משיק בכל נקודה). נחלק את העקום (a,b) ל- n חלקים: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. נחבר בקווים ישרים את הנקודות לקבלת קו פוליגוני. אורך קטע אחד (פיתגורס): $\Delta s_1 = \sqrt{\left(x(t_1)-x(t_0)\right)^2 + \left(y(t_1)-y(t_0)\right)^2 + \left(z(t_1)-z(t_0)\right)^2}$. אורך העקום יהיה מקורב ע"י: $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$. אם הגבול של הסכום הזה קיים וסופי כאשר $n \to \infty$, $\max\{\Delta s_i\} \to 0$ (ללא תלות בשיטת החלוקה של תחום הפרמטר לתת-קטעים), אז נגיד שהעקום C הוא בעל אורך ונסמן את אורכו ע"י: $L = \int_C ds$ כאשר ds זהו אלמנט של אורך הקשת.

__הערה:__ אורך הקשת של עקום אינו תלוי בתיאור הפרמטרי.

__משפט:__ יהי C עקום שנתון ע"י פרמטריזציה גזירה ברציפות: $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ $(a \le t \le b)$. בקטע $[a,b]$. אזי: C הוא עקום בעל אורך, ואורכו נתון ע"י:

$$\boxed{L = \int_C ds = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt = \int \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt}$$

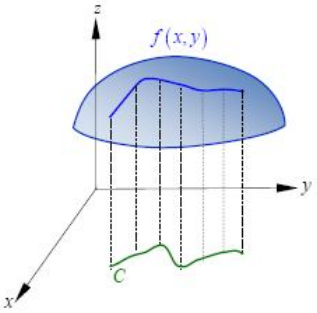
אינטגרל קווי מהסוג הראשון:

הגדרה: תהי $f(x,y,z)$ מוגדרת על העקום C. בדומה להגדרה של אורך עקום, נחלק את תחום הפרמטר, נגדיר קו פוליגוני ונתבונן בסכום: $\sum_{i=1}^{n} f\left(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\right)\Delta s_i$, τ_i היא נקודה שרירותית בקטע ה- i. אם הגבול של הסכום קיים וסופי כאשר $n \to \infty$, $\max\{\Delta s_i\} \to 0$ (ללא תלות בשיטת החלוקה), אז הוא נקרא: __האינטגרל הקווי מן הסוג הראשון__ של $f(x,y,z)$ לאורך מסלול C.

__הערה:__ האינטגרל אינו תלוי בכיוון ההליכה על העקום (בניגוד לאינטגרל קווי מסוג שני).

__משפט:__ יהי C עקום שנתון ע"י פרמטריזציה גזירה ברציפות: $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ $(a \le t \le b)$ בקטע $[a,b]$, ותהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה. אזי האינטגרל הקווי מן הסוג הראשון של הפונקציה $f(x,y,z)$ קיים ונתון ע"י:

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right)|\vec{r}'(t)|\, dt}$$



<u>הערה:</u> כאשר $f(x,y,z)\equiv 1$ מקבלים את אורך העקום.

<u>משמעות גיאומטרית:</u> עבור פונקציה $f(x,y)$ והעקום הדו-מימדי C,
המשמעות הגיאומטרית של $\int_C f(x,y)ds$ היא- השטח של משטח גלילי
("גדר" או "וילון") מעל העקום C שחסום ע"י $z=f(x,y)$ מלמעלה
וע"י מישור XY מלמטה (שבו עובר העקום C).

<u>דוגמא:</u>

עקום בורגי נתון ע"י המשוואה הפרמטרית: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=ht \end{cases}$ $a,h>0$.

חשב את האינטגרל בין הנקודות: $A=(a,0,0)$ $B=(a,0,2\pi h)$.

<u>פיתרון:</u> נמצא תחילה את t_A ו- t_B. $t_A=0,\ t_B=2\pi$. $\begin{matrix} x'(t)=-a\sin t \\ y'(t)=a\cos t \\ z'(t)=h \end{matrix}$. וכעת נחשב את ds:

$ds=\sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+h^2}dt=\sqrt{a^2+h^2}dt$.

ולכן האינטגרל: $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+h^2}dt=2\pi\sqrt{a^2+h^2}$.

<u>אינטגרל קווי מהסוג השני:</u>

<u>שדה וקטורי:</u> להעתקה $\vec{F}:R^3\to R^3$ שבמסגרתה לכל נקודה (x,y,z) וקטור:
$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ שמתחיל בנקודה (x,y,z) כאשר
P,Q,R הן פונקציות, נקרא- שדה וקטורי.

<u>משפט:</u> יהי C עקום שנתון ע"י פרמטריזציה גזירה ברציפות $\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$
$(a\le t\le b)$, בקטע $[a,b]$ ויהי $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף (P,Q,R רציפות). אזי האינטגרל הקווי
מהסוג השני של שדה $\vec{F}$ קיים ונתון ע"י: $\boxed{\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\vec{r}'(t)dt}$

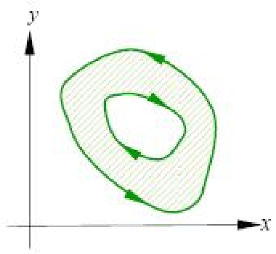
<u>סימון נוסף:</u> $\boxed{\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_a^b\left(P(x,y,z)\cdot x'+Q(x,y,z)\cdot y'+R(x,y,z)\cdot z'\right)dt}$

<u>משמעות פיזיקאלית:</u> העבודה שיש לבצע על-מנת להעביר חלקיק במסלול C בתוך שדה $\vec{F}$.

גרדיאנט של פונקציה סקלרית (מקרה פרטי): $\vec{F} = \vec{\nabla} f \Rightarrow \int_L \vec{F}\, dr = \int_L \vec{\nabla} f\, dr$.

נניח שהעקום L הוא חלק לחלקים, כלומר: אם L נתון ע"י: $\vec{c}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ ב- $[a,b]$ ו- x,y,z בעלות נגזרות פרט למספר סופי של נקודות ו- f בעלת נגזרות חלקיות בתחום המכיל את העקום, אזי: $\int_L \nabla f \cdot d\vec{c} = f\left(\vec{c}(b)\right) - f\left(\vec{c}(a)\right)$

משפט גרין:



תחום פשוט קשיר: תחום R ייקרא תחום פשוט קשיר אם כל קו סגור רציף ופשוט בתוך R הוא שפה של תחום חדש, שיכיל רק נקודות של R (כלומר, תחום בלי חורים).

עקום סגור: עקום פשוט (שלא חותך את עצמו) ומעגלי. סימון: $\oint_L f$

כיוון חיובי של שפת תחום: יהי C עקום במישור XY שנתון ע"י פרמטריזציה $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$.
כיוון המסלול מוגדר ככיוון שמושרה ע"י עליית הפרמטר t. אם המסלול סגור, אז מקובל לבחור פרמטריזציה שתיתן כיוון כך שהתחום הכלוא בתוך העקום יהיה בצד שמאל.

למה-1: יהיה S תחום שהוא y-פשוט במישור XY ותהיה $P(x,y)$ פונקציה רציפה ובעלת נגזרת חלקית רציפה לפי- y ותהיה L שפת התחום. אז: $\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L Pdx$

למה-2: יהיה S תחום שהוא x-פשוט במישור XY ותהיה $Q(x,y)$ פונקציה רציפה ובעלת נגזרת חלקית רציפה לפי- x ותהיה L שפת התחום. אז: $\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dydx = \oint_L Qdy$

למה-3: יהיה S תחום במישור XY שהוא גם x-פשוט וגם y-פשוט, ותהיינה P ו-Q פונקציות רציפות בתחום S ו- $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ אף הן רציפות ב- S. אזי: $\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{L^+} Pdx + Qdy$

משפט גרין: יהיה S תחום סגור וחסום במישור XY שהוא איחוד סופי של תחומים שהם פשוטים (ביחס ל-2 הצירים) ותהיה שפתו L (ייתכנו מספר מרכיבים לשפה).

אם P,Q רציפות בתחום וגם $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ רציפות בתחום אזי:

$$\boxed{\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy}$$

הערה: קיים דמיון בין משפט גרין לבין משפט ניוטון-לייבניץ אשר בו, במקום המסלול התוחם את השטח יש שתי נקודות שתוחמות את הקטע, ובמקום השדה- פונקציה.

מסקנה: אם $P = -y$ ו- $Q = x$ אז: $2A(S) = \iint_S 1 - (-1) = \oint xdy - ydx$

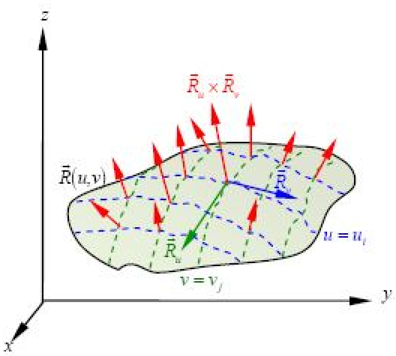
אינטגרלים משטחיים, משפטי גאוס וסטוקס

משטח: המקום הגיאומטרי של נקודות (x,y,z) בעלות קואורדינאטות:
$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$ כאשר $(u,v)\in D$. ההצגה הוקטורית:

$$\boxed{\vec{R}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}}$$

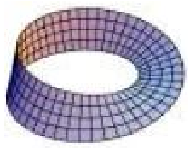
מקרה פרטי- גרף: כאשר $u=x,\ v=y$ ו- $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ והמשטח הוא גרף של הפונקציה $f(x,y)$, ונדרוש רציפות של f והנגזרות החלקיות.

מקרה נוסף- פונקציה סתומה: כאשר $F(x,y,z)=0$ ונדרוש רציפות של הנגזרות החלקיות של F ו- F עצמה רציפה.



לעקום: $\vec{R}(u_0,v)=x(u_0,v)\hat{i}+y(u_0,v)\hat{j}+z(u_0,v)\hat{k}$ נקרא קו שווה-u. בדומה עבור קו שווה-v. הקווים שווי-u ושווי-v הם קווים שנמצאים על המשטח. אם הפרמטריזציה של המשטח $\vec{R}(u,v)$ היא רציפה מסדר ראשון, אז הישרים המשיקים לקווים אלה מוכלים במישור המשיק למשטח. הכיוון המשיק לעקום שווה-u בנקודה $\vec{R}(u_0,v_0)$ הוא: $\vec{R}_v(u_0,v_0)$ ולעקום שווה-v באותה נקודה: $\vec{R}_u(u_0,v_0)$. אם שני הכיוונים אינם קולינאריים ואינם אפס אז הווקטור:
$\boxed{\vec{N}=\vec{R}_u(u_0,v_0)\times\vec{R}_v(u_0,v_0)}$ יהיה ניצב למשטח בנקודה $\vec{R}(u_0,v_0)$.

משטח חלק: משטח שיש לו מישור משיק בכל נקודה (רציף ובעל נגזרות חלקיות מסדר ראשון, רציפות).


טבעת מביוס
(משטח חד-צדדי)

משטח דו-צדדי: משטח שלם שעליו ניתן להגדיר כיוון מסויים של הנורמל.

דוגמא מפורסמת למשטח חד-צדדי: טבעת מביוס.

כיוון הנורמל: הכיוון החיובי של המשטח S הנתון בצורה וקטורית הוא כיוון הנורמל. אם S משטח סגור, זאת אומרת חוסם גוף סגור, אזי הכיוון החיובי הוא כלפי חוץ, אם המשטח הוא פתוח אז הכיוון החיובי הוא בכיוון של הציר z.

שטח משטח: בהנחות על הרציפות ובתנאי ש $\vec{R}_u\times\vec{R}_v\neq 0$ אז שטח המשטח מוגדר ע"י:

$$\boxed{A=\iint_D|\vec{R}_u\times\vec{R}_v|dudv}$$

דוגמא:

נניח קיים משטח $z=f(x,y)$, שניתן להגדירו ע"י פרמטריזציה XY "טבעית":
$x(x,y)=x,\ y(x,y)=y,\ z(x,y)=z(x,y),\ \vec{R}(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}+z(x,y)\hat{k}$. אזי וקטור הנורמל יהיה: $-z_x'i-z_y'\hat{j}+\hat{k}$. ואז שטח המשטח יהיה: $A=\iint_D|\vec{R}_x\times\vec{R}_y|\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}$

<u>סיסמת המשטחים:</u> נניח נתון משטח: $S=\{(x,y,z)\,|\,f(x,y,z)=a,\ g(x,y,z)\le b\}$ אזי השיוויון מתאר את המשטח, ואי-השיוויון (יכול להיות יותר מאחד) מתאר את התחום.

אינטגרל משטחי מסוג ראשון:

<u>הגדרה:</u> יהי S משטח דו-צדדי הנתון ע"י הפרמטריזציה: $\vec{R}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$. $(u,v)\in D$, כאשר x,y,z רציפות בתחום D ותהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה המוגדרת על המשטח S.

נחלק את המשטח S לתת-משטחים ששטח הגדול שבהם שואף לאפס, ובכל אחד מהם נבחר נקודה שרירותית, ואם הסכום של ערך הפונקציה בנקודה כפול שטח המשטח קיים ולא תלוי בחלוקה או בבחירת הנקודות, אזי גבול זה יהיה <u>האינטגרל המשטחי מהסוג הראשון.</u>

<u>סימון:</u> $\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)dS \triangleq \iint\limits_D f\left(\vec{R}(u,v)\right)\cdot|\vec{R}_u\times\vec{R}_v|\,dudv}$

<u>הערות:</u>

- $|\vec{R}_u\times\vec{R}_v|\,dudv$ - זהו אלמנט השטח.
- <u>משמעות פיסיקאלית:</u> אם $f(x,y,z)$ היא פונקציית צפיפות אזי: $\iint\limits_S f\cdot dS$ יהיה המסה.
- אם $f(x,y,z)\equiv 1$ נקבל שטח המשטח: $\iint\limits_S dS$
- היפוך כיוון הנורמל- <u>אינו</u> משנה את האינטגרל הקווי מן הסוג הראשון.

אינטגרל משטחי מסוג שני:

<u>הגדרה:</u> יהי S משטח דו-צדדי הנתון ע"י הפרמטריזציה: $\vec{R}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$.

$(u,v)\in D$, כאשר x,y,z רציפות בתחום D. יהי $\vec{N}$ וקטור נורמל למשטח (נורמל חיובי) כאשר וקטור היחידה בכיוון הנורמל: $\boxed{\hat{n}=\dfrac{\vec{R}_u\times\vec{R}_v}{|\vec{R}_u\times\vec{R}_v|}}$.

יהי $\vec{F}(x,y,z)=p(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ שדה וקטורי רציף שמוגדר על המשטח S. נגדיר את <u>האינטגרל המשטחי מהסוג השני</u> של השדה F דרך S ע"י: $\boxed{\iint\limits_S\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS}$.

מחשבים אותו בעזרת אינטגרל משטחי מהסוג הראשון: $\boxed{\iint\limits_S\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iint\limits_D\vec{F}\cdot\left(\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right)dudv}$

הערות:

- היפוך כיוון הנורמל כן משנה את סימנו של האינטגרל המשטחי מן הסוג השני.
- פיתוח של הנוסחה האחרונה: $\iint_D \left(\vec{F} \cdot \frac{\vec{R}_u \times \vec{R}_v}{\cancel{|\vec{R}_u \times \vec{R}_v|}} \right) \cancel{|\vec{R}_u \times \vec{R}_v|} dudv = \iint_S \left(\vec{F} \cdot \hat{n} \right) dS$.
- משמעות גיאומטרית: בנקודות שבהן הנורמל למשטח מקביל לכיוון השדה, $|\vec{F} \cdot \hat{n}|$ מקסימאלי, ובנקודות שהנורמל של המשטח ניצב לשדה- $\vec{F} \cdot \hat{n} = 0$.
- משמעות פיסיקאלית: זהו שטף של השדה $\vec{F}$ דרך המשטח S בכיוון $\hat{n}$.

משפט: האינטגרלים המשטחיים מסוג ראשון ומסוג שני, אינם תלויים בתיאור הפרמטרי של המשטח.

כתיבה וקטורית: נסמן ע"י $\vec{F}$ שדה וקטורי $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + R(x,y,z)\hat{k}$

ונקבל מכפלה סקלרית: $\vec{F} \cdot \hat{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$. זוהי למעשה כתיבה וקטורית של האינטגרל המשטחי- $I = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$. לפעמים רושמים: $\hat{n}\, dS = d\vec{S}$.

שטף: לאינטגרל $\iint_S \vec{V} \cdot \hat{n}\, dS$ קוראים שטף של השדה הקטורי $\vec{V}$ דרך המשטח S.

דוגמא: שדה מהירות $\vec{V}$ של נוזל $\hat{n}$. $\vec{V} \cdot \hat{n}\, dS$ - כמות הנוזל ליחידת שטח היוצאת מהמשטח.
השטף דרך המשטח S: $\iint_S \vec{V} \cdot \hat{n}\, dS$ או $\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$. אם המשטח S סגור, מסמנים: $\oiint_S \vec{V} \cdot \hat{n}\, dS$

דיברגנט:

הגדרה: יהיה שדה וקטורי $\vec{V}$ המוגדר באיזה תחום במרחב- N. תהיה P_0 נקודה בתחום זה. נבחר משטח S חלק לחלקים כך ש- S הוא שפת התחום. נסתכל על הגבול: $\lim_{V(N)\to 0} \frac{\oiint_S \vec{V} \cdot \hat{n}\, dS}{V(N)}$ ($V(N)$ - נפח התחום). אם גבול זה קיים, קוראים לו הדיברגנט של השדה $\vec{V}$ בנקודה P_0: $div(P_0)$.

הערה: הדיברגנט אינו תלוי במערכת קואורדינאטות.

האופרטור נבלה:

גרדיאנט: כפל של וקטור (נבלה) בסקלר (פונקציה) ולכן מקבלים וקטור (שדה וקטורי):

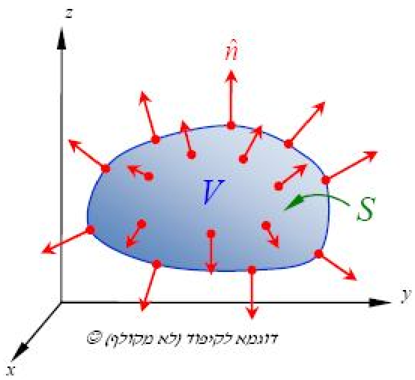
$$\boxed{\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f \right)}$$

דיברגנט הוא מכפלה של שדה וקטורי עם נבלה (שני וקטורים) והתוצאה היא שדה סקלרי:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=DIV(\vec{V})=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R)=\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q+\frac{\partial}{\partial z}R}$$

<u>שדה מחוסר מקורות:</u> שדה וקטורי אשר הדיברגנט שלו שווה לאפס בכל מקום $div(\vec{V})=0$.

<u>משפט גאוס (משפט הדיברגנט):</u>



יהי D תחום סגור וחסום ב-R^3, שהוא איחוד של מספר סופי של תחומים "פשוטים" ותהי שפתו S, משטח חלק לחלקים, כך שהנורמל $\hat{n}$ על S פונה החוצה מ-D. יהי $\vec{V}(x,y,z)$ שדה וקטורי שרכיביו הם פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות לחלקים, בקבוצה פתוחה שמכילה את D ואת שפתו S. אזי מתקיים:

$$\boxed{\oiint\limits_S\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dS=\iiint\limits_D\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)dxdydz}$$

<u>רוטור:</u>

<u>הגדרה:</u> יהי $\vec{F}(x,y,z)=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ שדה וקטורי ב-C^1 בתחום $D\subseteq R^3$. תהי $p(x,y,z)$ נקודה ב-D. נעביר דרך נקודה זו מישור כלשהו. סביב הנקודה נעביר עקום פשוט, סגור-C ונבחר עליו כיוון חיובי. יהיה $\hat{n}$ וקטור יחידה הניצב למישור שבו נמצא C ומכוון לכיוון החיובי (כלל ידי ימין).

נגדיר את ה<u>צירקולציה</u> (מערבולת) של $\vec{F}$ על C כך: $F_n=\oint\limits_C\vec{F}\cdot dr$. נגדיר: $\omega_n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{S}\oint\limits_C\vec{F}\cdot dr$

כאשר s - שטח התחום בתוך-C. ω_n הוא הרכיב בכיוון n של וקטור $\vec{\omega}$ שנקרא לו: הרוטור של $\vec{F}$ $\vec{\omega}=rot\vec{F}$. את הרוטור מקבלים ע"י בחירה של-3 כיוונים ניצבים זה לזה, ומוצאים את הרכיבים בשלושת הכיוונים הנ"ל.

כאשר-3 הכיוונים הינם $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ נקבל את הנוסחה:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F}=rot\,\vec{F}=curl\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left(R_y-Q_z\right)\hat{i}+\left(P_z-R_x\right)\hat{j}+\left(Q_x-P_y\right)\hat{k}}$$

<u>הערה:</u> הגדרת הרוטור אינה תלוייה במערכת הצירים, אבל הייצוג כן.

<u>שדה מחוסר מערבולות:</u> שדה שבו הרוטור שווה אפס בכל מקום $rot\,\vec{F}=\vec{0}$.

<u>הדיברגנט של הרוטור:</u>

$$div(rot\,\vec{F})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=0$$ (סקלר).

<u>הרוטור של הגרדיאנט:</u> $\vec{0}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)$ (וקטור).

<u>משפט סטוקס:</u>

יהי S משטח חלק למקוטעין, ותהי שפתו C מורכבת ממספר סופי של עקומים חלקים לחלקים.
הנורמל החיובי למשטח הוא רציף לחלקים ונמצא בהתאמה עם הכיוון החיובי של C. יהיה
$\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ב-C^1, אזי: $\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S\left(\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\right)dS}$

<u>הערות:</u>

- המשפט אומר, שעבודה לאורך המסלול הסגור C שווה לשטף של $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ דרך איזשהו משטח S, ש-C שפתו.
- עבור משטח מישורי XY משפט סטוקס מצטמצם ל<u>משפט גרין</u>: (כאשר $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}$).

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S\left(\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\right)dS=\iint_D\left(\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{k}\right)dxdy=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)dxdy$$

<u>שדה משמר:</u>

<u>תחום פשוט קשר:</u> $D\subset R^3$, אם כל עקום סגור ופשוט הוא קצה של משטח הנמצא כולו ב-D.

<u>משפט:</u> יהיה $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף המוגדר בתחום $D\subset R^3$ התנאים הבאים על $\vec{F}$ שקולים:

1. לכל עקום סגור מכוון ופשוט בתחום D מתקיים: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$
2. לכל שני עקומים פשוטים ומכוונים C_1,C_2 בעלי אותן נקודות קצה: $\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$
   (האינטרגל אינו תלוי במסלול, אלא רק בנקודות הקצה).
3. קיימת פונקציה סקלרית הנקראת פונקציית פוטנציאל $U(x,y,z)$ המקיימת $\vec{F}=\vec{\nabla}U$
   ומתקיים: $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=U(B)-U(A)$
4. בנקודות שבהן $\vec{F}$ לא מוגדרת, גם U אינה מוגדרת.
5. אם בנוסף D הוא תחום פשוט קשר אז: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$ (או- $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ בדו-מימד).

שדה וקטורי המקיים את אחד מהתנאים הנ"ל (שכולם שקולים) הוא: **שדה משמר**.

הערה: עבור שדה מישורי אם התחום לא פשוט-קשר אז התנאי $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ הוא הכרחי אבל לא מספיק.

פעולות וקטוריות מסדר-2:

לפלסיאן: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$.

פונקציה הרמונית: פונקציה $f \in C^2$ שמתקיים: $\Delta f = 0$.

דוגמא: $p(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}$ הרמונית בתוך עיגול היחידה ולא על שפתו.

פעולה נוספת: $h \subseteq C^1$ - פונקציה סקלרית, ו- $f \subseteq C^2$ אז :

$$div(h\,grad\,f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \boxed{h \cdot \Delta f + \overrightarrow{grad}\, f \cdot \overrightarrow{grad}\, g}$$

שדה מרכזי: מסה M בראשית ב- R^3 תפעיל כוח על מסה m הנמצאת בנקודה $\vec{r} = (x,y,z)$ בעצמה: $\frac{GMm}{r^2}$ ובכיוון הראשית, כאשר: $r = \|r\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, G - קבוע הגרוויטציה. הכוח $\vec{F}$ יהיה: $\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{-GMm}{r^3}$. שדה זה הוא משמר ופונקציית הפוטנציאל: $\phi = \frac{GMm}{r}$.

חוק גאוס:

יהיה M תחום ששפתו מורכבת ממשטח אחד חלק ב- R^3 . אם הנקודה $(0,0,0)$ לא על שפת המשטח, אזי: $\frac{\oiint_{\partial S} \vec{r} \cdot \hat{n}\, dS}{r^3} = \begin{cases} 4\pi & (0,0,0) \in M \\ 0 & (0,0,0) \notin M \end{cases}$ כאשר: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ו- $\hat{n}$ הוא הנורמל החיצוני למשטח.